Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Berlin, 1850.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

1.

Beitrag zur Lehre von den Schwingungen elastischer fester Körper.

(Von Herrn *v. Heim*, Oberst-Lieutenant im Königlich-Würtembergischen Ehren-Invaliden-Corps zu Stuttgart.)

1.

Die beiderlei Aggregatzustände der Körper, welche man unter den Benennungen *fest* und *flüssig* zu begreifen pflegt, unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dafs die Theilchen der *festen* Körper durch innern Zusammenhang unter sich verbunden sind und nur durch Kräfte, deren Stärke diesen Zusammenhang überwiegt, sich von einander trennen lassen, wogegen die Theilchen der *tropfbaren* oder *expansiv flüssigen* Körper (sofern von der Klebrigkeit, als einer nicht wesentlichen Eigenschaft derselben, abgesehen wird, oder sofern sie als vollkommen flüssig vorausgesetzt werden) einer Kraft, welche sie zu trennen strebt, für sich keinen Widerstand entgegensetzen, dafs sie nicht, wie die Theilchen der festen Körper, an eine bestimmte Ordnung, in der die verschiedenen Theilchen, im Zustande der Bewegung sowohl, als in dem der Ruhe sich neben einander befinden, gebunden sind und dafs sie im Allgemeinen eines äufsern Druckes, z. B. des Drucks der Schwere bedürfen, um während der Bewegung in stetiger Berührung zusammengehalten zu werden.

Indessen ist auch bei den festen Körpern, als solchen, die Verbindung ihrer Grundbestandtheile mit einander keineswegs als unveränderlich zu betrachten; und insbesondere kommt denjenigen Arten derselben, welche man *elastisch* nennt, die Eigenschaft zu, dafs ihre kleinsten Theile durch die Einwirkung äufserer Kräfte ihre gegenseitige Lage nach der eigenthümlichen Natur der Körper und nach der Stärke dieser Kräfte mehr oder weniger verändern, jene Lage aber, sobald die äufsere Einwirkung aufhört, wenn dieselbe ein gewisses Maafs nicht überschritten hat, von selbst wieder annehmen können.

Allein ungeachtet dieser möglichen Veränderungen behalten diese Körper dennoch die Natur des festen Aggregatzustandes, so dafs auch bei der in jenen räumlichen Veränderungen bestehenden Bewegungen jeder an irgend einem Puncte eines solchen Körpers angebrachte Druck oder Zug nach der ihm eigen-

thümlichen bestimmten Richtung sich dem ganzen Körper mittheilt und nur nach dieser Richtung auf denselben wirkt. Die Bewegung irgend eines Theils eines festen Körpers übt demzufolge durch seinen Zusammenhang mit den übrigen Theilen des Körpers einen unmittelbaren Einflufs auf die Bewegung aller dieser Theile aus; woraus weiter folgt, dafs, wenn es sich davon handelt, die Bewegungen, in welche die Theilchen eines elastischen festen Körpers durch äufsere, deren Spannkraft erregende Kräfte versetzt werden, durch Rechnung zu bestimmen oder die Beziehungen zwischen den spannenden Kräften und den räumlichen Veränderungen des Körpers durch Gleichungen auszudrücken, kein Theil desselben für sich allein und abgesondert von den übrigen Theilen betrachtet werden kann, sondern die Gleichungen nothwendig sämmtliche Theile des Körpers umfassen müssen.

2.

Anders verhält es sich mit der Bewegung flüssiger Körper. Bei einer flüssigen Masse pflanzt sich jeder Druck auf ihre Oberfläche und die Einwirkung jeder Kraft auf irgend ein Theilchen der Masse nach allen Richtungen im Innern fort, und der irgend ein Element der Flüssigkeit umgebende Druck stellt die gesammte Beziehung des Elements zu allen auf dasselbe wirkenden Kräften vor und begreift alle diese Kräfte in sich, so dafs man, wenn auch jedes Element durch seine Berührung mit den ihm nächsten Elementen auf die Bewegung dieser und anderer Theile Einflufs hat, dennoch dasselbe als für sich allein jenem Drucke unterworfen und durch ihn angetrieben und in Bewegung gesetzt betrachten kann.

Man könnte zwar einwenden, auch bei den elastischen festen Körpern träten die gegenseitigen Einwirkungen der verschiedenen Theilchen auf einander, d. h. die sogenannten Molecularkräfte an die Stelle des innern Zusammenhanges derselben, durch welchen, so wie durch den Druck, den die Elemente einer Flüssigkeit auf einander ausüben, eben jene Kräfte ihre Thätigkeit äufsern, und wenn daher bei der Bestimmung der Bewegung eines einzelnen Theils eines solchen Körpers diese Kräfte in die Rechnung eingehen, so sei dadurch zugleich auch auf die Verbindung dieses Theils mit den übrigen Theilen des Körpers die nöthige Rücksicht genommen. Allein das Sachverhältnifs ist bei den beiderlei Aggregatformen dennoch völlig verschieden. Irgend ein Theilchen eines flüssigen Körpers kann nämlich einer besondern, auf dasselbe wirkenden Kraft, wenn der dazu nöthige Raum vorhanden ist, für sich nachgeben, und eine durch die entstehende Bewegung dieses Theilchens eintretende

Veränderung in der gegenseitigen Lage der benachbarten Theilchen kann kein Hindernifs für diese Bewegung abgeben, sondern etwa nur zu dem Drucke, dem das Theilchen unterworfen ist, beitragen. Ein fester Körper, sei er elastisch oder nicht, kann dagegen, wie auch die bewegenden Kräfte an ihn angebracht seien, immer nur als Ganzes und keinerlei Theil desselben kann für sich in Bewegung gesetzt werden, so dafs die Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers und jedes einzelnen Theils desselben in jedem Augenblicke der Bewegung von der ganzen Masse des Körpers abhangt.

3.

Die Bewegungen der elastischen festen Körper, von denen in diesem Aufsatze die Rede ist, lassen sich unterscheiden: in solche, welche durch Ausdehnung oder Zusammendrückung der Körper nach der Richtung ihrer Längs-Achse, ferner in solche, welche durch Drehung um diese Achse (durch Torsion) und in solche, welche durch Biegung hervorgebracht werden. Jede dieser Arten von Bewegung kann mit den beiden andern, oder mit einer derselben verbunden sein. Im Folgenden wird jedoch nur jede für sich, getrennt von den übrigen, näher betrachtet und es wird ferner vorausgesetzt werden, dafs die Längs-Achse (Centrallinie) (welche sowohl krumm als gerade sein kann) eine gerade Linie sei. Die Bewegungen werden *Schwingungen* genannt, wenn die Gestalt-Änderungen der Körper, welche die Bewegungen hervorbringen, in fortgesetzter Folge abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten des Gleichgewichtstandes Statt haben.

4.

Sind mehrere materielle Puncte, deren jeder der Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte unterworfen ist, auf irgend eine Art unter sich verbunden, so werden sie ihre, durch jene Kräfte hervorgebrachten Bewegungen gegenseitig modificiren; d. h. es wird die Bewegung, welche jeder der Puncte wirklich annimmt, nach Richtung und Geschwindigkeit im Allgemeinen von derjenigen verschieden sein, die er, in freiem Zustande für sich bestehend, durch dieselbe Einwirkung annehmen würde.

Man stelle sich in irgend einem Augenblicke der Bewegung die auf einen der Puncte wirkende bewegende Kraft, welche als gegeben zu betrachten ist, in zwei Theilkräfte so zerlegt vor, dafs die eine derselben der Geschwindigkeitszunahme dieses Puncts, wie sie in dem Augenblicke wirklich Statt findet, als bewegende Kraft entspricht. Die Wirkung der durch die Zerlegung sich ergebenden zweiten Theilkraft wird durch die Verbindung

des Puncts mit den übrigen materiellen Puncten aufgehoben und die letztere Kraft daher die *verlorne Kraft* genannt.

Alle diese zum System gehörigen verlornen Kräfte müssen offenbar, wie grofs auch die Zahl der Puncte und wie auch deren Zusammenhang beschaffen sein mag, in jedem Augenblicke unter sich im Gleichgewicht sein, weil sonst Bewegung aus ihnen hervorgehen müfste und die ersten Theilkräfte, im Widerspruch mit der Annahme, nicht die sein könnten, von welchen allein die wirkliche Bewegung des Systems abhangt.

Der letztere Satz begreift im Wesentlichen den nach *d'Alembert* benannten Hauptgrundsatz der Dynamik (*d'Alembert,* Traité de Dynamique, 1758 No. 60. und *Poisson,* Traité de Mécanique, 1833, Tome II. No. 350) in sich, durch welchen die ganze Lehre von der Bewegung der Körper auf die Lehrsätze der Statik sich zurückführen läfst und alle diese Sätze zugleich bei jener Lehre Anwendung finden.

5.

Das angeführte Princip von *d'Alembert* setzt zwar seinem Begriffe nach eine Verbindung mehrerer materiellen Puncte voraus, läfst sich jedoch, wiewohl uneigentlich, auch auf einen einzelnen für sich bestehenden Punct, auf welchen eine oder mehrere Kräfte wirken, anwenden. In diesem besondern Falle, in welchem die zu zerlegende Kraft mit der ersten Theilkraft zusammenfällt, mufs demnach die verlorne Kraft für sich im Gleichgewicht, oder gleich Null sein, und in diesem uneigentlichen Sinne findet das Princip dann ebenfalls auf die Bewegung der flüssigen Körper Anwendung, indem, der Natur derselben gemäfs, bei der Bildung der Grundgleichungen für ihre Bewegung nur ein einzelnes Element in Betracht zu ziehen ist und betrachtet werden kann.

Ein solches Verfahren ist für die Lösung der die Bewegung der flüssigen Körper betreffenden Fragen zwar nicht nothwendig, insofern eine andere, etwas verschiedene Auffassungsweise die gleichen Ergebnisse liefert (Man vergleiche z. B. die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper von *Euler,* übersetzt von *Brandes,* 1806, 2ter Theil, 2ter Abschnitt), aber sie ist gestattet, da sie nichts Ungereimtes enthält. Wenn es sich dagegen von Bewegungen irgend einer Art der Elemente eines festen Körpers handelt, dessen Theile durch innern Zusammenhang, wenn auch nicht auf unveränderliche Weise, mit einander verbunden sind, so mufs nothwendig das Gleichgewicht als zwischen den verlornen Kräften sämmtlicher Elemente des Körpers bestehend angenommen werden und eine ähnliche Anwendung des genannten

Princips auf einzelne Elemente des Körpers, wie bei flüssigen Körpern, könnte, als mit dem Wesen und dem Begriffe des Princips in offenbarem Widerspruche stehend, nur zu unrichtigen Folgerungen führen.

6.

In dieser Beziehung mufs der Weg, den die französischen Schriftsteller, unter ihnen namentlich *Poisson*, zur Entwickelung der Gesetze der Schwingungen elastischer fester Körper gefolgt sind, zu einem gewichtigen Bedenken Anlafs geben. In dem vom Gleichgewicht der festen Körper handelnden dritten Buche seines „Traité de Mécanique" sind von diesem Physiker die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts einer biegsamen Saite und einer elastischen Ruthe abgeleitet; welche Gleichungen, den Grundsätzen der Analysis gemäfs, auf ein einzelnes, im Zustande der ruhenden Spannung durch irgend welche Kräfte befindliches Element des gebogenen, oder nur nach seiner Längs-Achse gedehnten Körpers sich beziehen und durch entsprechende Integration die Gestalt desselben in gespanntem Zustande bestimmen. Dieser Gleichungen bedient sich *Poisson*, indem er die verlorne Kraft des Elements an die Stelle der dasselbe spannenden Kräfte setzt, zur Darstellung der Grundgleichungen der Bewegung der genannten Körper, und gelangt hierdurch, in Bezug auf die Schwingungen der biegsamen Saite und der elastischen Ruthe in der Richtung ihrer Längs-Achse, zu Differential-Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen, welche der Form nach ganz mit den auf die Schwingungen der Luft in einer Röhre bezüglichen Gleichungen der Hydrodynamik übereinstimmen (No. 484, 494, 658).

Es ist aber klar, dafs wenn, wie es das Princip von *d'Alembert* seiner Grundbedeutung nach unstreitig fordert und wie es in andern Fällen der Bewegung fester Körper, z. B. bei der Umdrehungsbewegung eines solchen um eine feste Achse (No. 391), um einen festen Punct (No. 412) und bei der Bewegung eines Systems von Körpern (No. 531) auch von *Poisson* geschieht, die verlorenen Kräfte im ganzen Umfange des elastischen Körpers, oder des Systems, als im Gleichgewicht unter sich stehend angenommen werden, oder das Integral derselben nach der ganzen Ausdehnung des Körpers gleich Null gesetzt wird, wodurch die eine unabhängige Veränderliche aus den Gleichungen gänzlich verschwindet, die Ergebnisse der Rechnung ganz anders ausfallen müssen, als wenn die Gleichungen in der den flüssigen Körpern entsprechenden Form mit partiellen Differentialen dargestellt und behandelt werden.

7.

Zur Bestimmung der mit der Spannung elastischer fester Körper verbundenen Bewegung ist indessen noch ein weiterer Grundsatz nöthig: ein Grundsatz nämlich, durch welchen die Beziehung sich ausspricht, in der in jedem Augenblicke der Bewegung die Veränderung der Lage eines Elements des Körpers zu der irgend eines andern Elements steht.

Ein an einem Ende seiner Längs-Achse befestigter Körper, von gleichen Querschnitten und sonst gleicher Beschaffenheit, werde z. B. durch eine nach der Richtung dieser Achse wirkende Kraft ausgedehnt. Nach dem Grundgesetze, dafs gleiche Ursachen gleiche Wirkungen hervorbringen, werden offenbar gleich lange Theile des Körpers in jeder unendlich kleinen, und folglich auch in jeder endlichen Zeit, um gleich viel länger werden, oder eine gleiche Spannung annehmen. Haben die Theile des Körpers ungleiche Querschnitte und sind sie verschiedenen Kräften unterworfen, so folgt aus demselben Gesetze, dafs die Ausdehnungen und Spannungen gleich langer Theile nach einer und derselben Zeit direct wie die auf sie wirkenden Kräfte und umgekehrt wie die Flächen der Querschnitte derselben sich verhalten werden.

Aus ähnlichen Betrachtungen erhellet, dafs bei der Bewegung eines elastischen Körpers mit gleichen Querschnitten um seine Längs-Achse und bei der durch Biegung desselben entstehenden Bewegung die Momente der Spannungen der Querschnitte, oder die Drehwinkel und Krümmungswinkel in jedem Augenblicke der Bewegung wie die Momente der drehenden und biegenden Kräfte sich verhalten werden.

Jenem Grundsatze, welcher dazu soll dienen können, aus den als bekannt angenommenen, irgend einem Augenblicke der Bewegung entsprechenden räumlichen Veränderungen eines oder mehrerer Elemente des elastischen Körpers die der übrigen Elemente und des ganzen Körpers, so wie sie in demselben Augenblicke Statt finden, zu bestimmen, wird sich demgemäfs die allgemeine Fassung geben lassen: *dafs die Spannungen der verschiedenen Elemente eines elastischen Körpers in jedem Momente der durch die Spannung des Körpers entstehenden Bewegung sich eben so zu einander verhalten, wie wenn der Körper in diesem Momente im Zustande des Gleichgewichts mit den spannenden Kräften (der ruhenden Spannung) sich befände.*

Der oben angeführte Grundsatz beruht auf der Voraussetzung, dafs die die Bewegung des Körpers erzeugenden Kräfte ihre Wirksamkeit auf sämmtliche Theile des Körpers gleichzeitig ausüben, d. h. dafs die Übertragung

dieser Wirksamkeit von den Angriffspuncten auf die nicht unmittelbar angegriffenen Theile des Körpers, wozu allerdings ein erster Anfang von Spannung nöthig scheint, in unbestimmbar kurzer Zeit erfolge: einer Voraussetzung, welche der ganzen Lehre von der Bewegung fester Körper zum Grunde liegt.

Den besonderen Betrachtungen, welche die vom Verfasser des gegenwärtigen Aufsatzes im Jahre 1838 herausgegebene Schrift „Über Gleichgewicht und Bewegung gespannter elastischer fester Körper etc." zur Unterstützung dieses Grundsatzes (§. 194.) enthält, mögen hier noch folgende weitere beigefügt werden.

8.

Eine elastische Stange sei um eine, an einem Ende ihrer Längs-Achse senkrecht auf diese angebrachte Achse beweglich; am andern Ende wirke eine Kraft auf Umdrehung der Stange um die letztere Achse. Die Bewegung werde durch Reibung, welche an dieser Achse Statt findet und welche sich nach Belieben vermehren und vermindern läfst, erschwert. Wäre keine Reibung vorhanden, so würde, vermöge der im vorigen Paragraph erwähnten Voraussetzung, die Umdrehung der Stange ohne Biegung derselben anfangen, sobald die Kraft zu wirken beginnt: wegen der Reibung aber mufs ein Theil der Kraft, welcher das gleiche Moment mit der Reibung hat (und welcher die für die Umdrehungsbewegung verlorne Kraft bildet) dazu verwendet werden, dieselbe zu überwinden; und nur durch den übrigen Theil der Kraft wird die Umdrehung hervorgebracht. Durch jenen Theil wird die Stange in Spannung versetzt, und die Umdrehung kann nicht eher anfangen, als bis der Grad der Spannung, welchen die Überwindung der Reibung erfordert, erzeugt ist. Dieselbe Theilkraft, welche den gleichen Angriffspunct und die gleiche Richtung hat wie die ganze Kraft, mufs daher beim Anfange der Umdrehung mit der Reibung im Gleichgewicht sein. Daher müssen auch die Spannungen der Querschnitte im Gleichgewicht sein mit dieser Theilkraft, und deren Momente müssen sich eben so zu einander verhalten, wie im Zustande des Gleichgewichts mit eben dieser sie spannenden Kraft. Dieses ist der Fall, mag die Reibung einem gröfsern oder kleineren Theile der ganzen Kraft gleich, oder eben so grofs wie diese sein, und es läfst sich für jeden Zustand der elastischen Stange, vom ungespannten an, bis zu dem der gröfsten Spannung, den sie annehmen mufs, oder für jeden Zeitpunct der die Spannung begleitenden Bewegung, d. h. der entstehenden Biegung, ein Grad der Reibung angeben, welcher der Spannung gerade das Gleichgewicht halten würde, auch wenn die ganze Kraft zur Überwindung der

vorhandenen Reibung nicht hinreichte. Bei jedem solchen Grade der Reibung müfste das Verhältnifs der Spannungen, welche irgend zwei Querschnitte oder irgend zwei Elemente der Stange angenommen haben, dasselbe sein, wie wenn die Stange im Zustande der ruhenden Spannung, des Gleichgewichts mit der Theilkraft, welche gleiches Moment mit dieser Reibung hat, sich befände: daher mufs offenbar dasselbe Verhältnifs auch in dem entsprechenden Augenblick der mit der Biegung verbundenen Bewegung Statt finden; unabhängig von der Gröfse der Reibung oder des die Umdrehung erschwerenden Widerstandes, welcher wirklich vorhanden ist.

Eben diese Folgerungen müssen auch dann ihre Gültigkeit haben, wenn mehrere Kräfte an der Stange wirken, oder wenn an jedem Elemente derselben eine eigene Kraft, wie die Schwere, thätig ist, indem in diesem Falle, was hier von der biegenden Kraft gesagt ist, von der Resultirenden der Kräfte gilt.

Man bemerke noch, dafs das Verhältnifs zwischen den Spannungen je zweier Elemente des elastischen Körpers bei der Biegung von einem Augenblicke dieser Bewegung zum andern sich ändert, weil die Längen der Hebel-Arme, an denen die spannende Kraft auf je zwei Querschnitte wirkt, durch die Krümmung der, wenn auch ursprünglich geraden Längs-Achse des Körpers in jedem Augenblicke in ein anderes Verhältnifs zu einander treten, dafs jenes Verhältnifs aber bei der Drehung des Körpers um seine Längs-Achse (Torsion) und bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung desselben nach der Richtung dieser Achse, als während der Bewegung unverändert und somit dem Verhältnisse, wie es im Zustande des Gleichgewichts mit der ganzen auf die Stange wirkenden Kraft besteht, als gleichbleibend betrachtet werden kann.

Die Darstellung der Grundgleichungen für die genannten Bewegungen der elastischen festen Körper, wie sie durch Anwendung des eben angeführten Grundsatzes und jenes von *d'Alembert* sich ergeben, wird Gegenstand der folgenden Paragraphen sein.

Bewegung einer elastischen Stange, welche durch Ausdehnung oder Zusammendrückung nach der Richtung der Centrallinien hervorgebracht wird.

9.

Eine am Ende A ihrer Länge befestigte elastische Stange (Taf. I. Fig. 1.) werde durch eine oder mehrere nach der Centrallinie AB wirkende Kräfte in der Richtung von A nach B, welche Richtung als diejenige der positiven dieser Kräfte angenommen wird, ausgedehnt; AB, die Länge der Cen-

trallinie, sei $= l$, $Ax = x$, $Ax' = x + \partial x$, so dafs ∂x die Dicke der zwischen den beiden Normalschnitten an x und x' enthaltenen Normalschicht (des Elements) xx' bezeichnet. Nach Verflufs der Zeit t sei durch die Ausdehnung x nach M gekommen und $xM = u$, oder $AM = x + u$.

Die der Normalschicht an A eigenthümliche beschleunigende Kraft sei X, welche diese Schicht nach der positiven Richtung der x von x gegen B zu bewegen strebt. Die Spannung des Normalschnitts der elastischen Stange an x, welche mit T bezeichnet werde, ist als eine den ausdehnenden Kräften widerstrebende oder ihnen entgegengesetzt von B gegen A auf den Theil xB der Stange wirkende Kraft zu betrachten, welche von einem Normalschnitt zum andern mit der Summe der den Normalschnitt spannenden Kräfte zugleich wächst und abnimmt und, wenn x in $x + dx$ sich verändert, in $T + dT$ übergeht, so dafs dT der Normalschicht an x als eigenthümliche bewegende Kraft angehört.

Die beschleunigende Kraft X giebt, wenn ∂m die Masse der Normalschicht an x bedeutet, die bewegende Kraft $X \partial m$ und in dem der Zeit t entsprechenden Augenblicke der Bewegung sind demnach

$$X \partial m + \partial T$$

die bewegenden Kräfte für diese Normalschicht, durch welche sie, wenn sie frei wäre, von A gegen B angetrieben worden wäre. (Wenn X positiv ist, bekommt ∂T, als eine mit $X \partial m$ gleichartige Function ausgedrückt, einen negativen Werth, weil dann die Spannung an x gröfser ist, als an x'; und umgekehrt, wenn X negativ ist).

Die Geschwindigkeit, welche die Normalschicht an x nach Verflufs der Zeit t in der Richtung von x gegen B wirklich angenommen hat, ist $\frac{\partial u}{\partial t}$, und die ihr entsprechende beschleunigende Kraft ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: daher ist in demselben Augenblick die auf diese Schicht verlorne bewegende Kraft

$$(1.) \qquad = \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \partial m + \partial T.$$

Die letztere Kraft des einzelnen Elements setzt nun *Poisson* (Traité de Mécanique No. 493) für sich gleich Null und erhält dadurch dieselbe Gleichung wie für die Bewegung einer Flüssigkeit in einer Röhre, nämlich $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Eine solche Annahme ist jedoch, wie oben bemerkt, nicht statthaft. Sie würde die Gleichung $\partial T = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right) \partial m$ geben und dadurch, weil $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ eine nach

x veränderliche Gröfse ist, zu der Folgerung führen, dafs die Spannung T der elastischen Stange in jedem Falle, auch wenn sie durchaus gleiche Normalschnitte hätte und nur durch eine einzige, am Ende B ihrer Länge angebrachte Kraft gespannt würde, von einem Normalschnitt zum andern sich verändern müfste; was offenbar unrichtig ist.

10.

Nach dem Princip von *d'Alambert* mufs dagegen die Summe jener verlornen Kräfte (1.) im ganzen Umfange des Körpers gleich Null angenommen werden; woraus, wenn ferner aufser den Kräften X noch eine weitere Kraft p am Ende B der Stange nach der Richtung von A gegen B auf sie wirkt, die Gleichung

$$(2.)\quad \int_{l\div 0}\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\partial m+p+\int_{l\div 0}\partial T = 0 \text{ folgt.}$$

Um die hier angedeutete Integration auszuführen, ist die Gröfse u als eine Function von x auszudrücken; was mittels des Grundsatzes (§. 7.) geschehen kann. Bezeichnet nämlich

Δl die Verlängerung der ganzen Stange nach t Zeit-Einheiten der Bewegung, in welcher die Dicke ∂x der Normalschicht an x um ∂u sich vergröfsert hat;

Σx zur Abkürzung die Summe $\int_{l\div x} X\partial m$ der Kräfte $X\partial m$ im Abschnitt xB der Stange;

S den Flächen-Inhalt des Normalschnitts an x:

so hat man vermöge dieses Grundsatzes, und da hier die Spannungen und Ausdehnungen je zweier Elemente der Stange in jedem Augenblicke sich eben so zu einander verhalten wie im Zustande des Gleichgewichts mit der ganzen Summe der spannenden Kräfte, die Proportion:

$$\partial u : \Delta l = \frac{p+\Sigma x}{S}\partial x : \int_{l\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x,$$

woraus ∂u

$$\partial u = \frac{\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x}{\int_{l\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x}\cdot\Delta l \quad\text{und}\quad u = \frac{\int_{x\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}}{\int_{l\div 0}\frac{p+\Sigma x}{S}\partial x}\cdot\Delta l \text{ folgt.}$$

Die Spannung des Normalschnitts an x in dem Augenblicke, auf welchen die Verlängerungen Δl und ∂u sich beziehen, ist, wenn ε die eigen-

thümliche Spannkraft der Stange für eine Flächen-Einheit bezeichnet:

$$T = \varepsilon S \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \Delta l \cdot \frac{p + \Sigma x}{\int\limits_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S}},$$

und es ist einleuchtend, dafs man in der Gleichung (2.) statt der Summengröfse $\int\limits_{l \div 0} \partial T = (T)_{l \div 0} = -\varepsilon \Delta l \frac{\int\limits_{l \div 0} X \partial m}{\int\limits_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x}$ den Werth von T für $x = 0$ mit negativem Zeichen, nämlich $-\varepsilon \Delta l \frac{p + \int\limits_{l \div 0} X \partial m}{\int\limits_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x}$ zu setzen, oder jener, nur die Kräfte X in sich schliefsenden Summengröfse wegen, der Kraft p noch das besondere Glied $-\varepsilon \Delta l \frac{p}{\int\limits_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x}$ beizufügen hat.

Die Gleichung (2.), in welcher nunmehr die Veränderliche x ganz verschwunden und als veränderliche Gröfse, nebst t, nur noch die Zeitfunction Δl enthalten ist, nimmt hiernach die Gestalt

$$(3.)\quad \Big(p + \int\limits_{l \div 0} X \partial m\Big)\Big(\int\limits_{l \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x - \varepsilon \Delta l\Big) - \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial t^2} \cdot \int\limits_{l \div 0} \Big(\int\limits_{x \div 0} \frac{p + \Sigma x}{S} \partial x\Big) \partial m = 0 \text{ an.}$$

11.

Man setze nun, die elastische Stange sei am Ende A ihrer Länge in lothrechter Richtung befestigt, und als ausdehnende Kraft wirke, aufser der am Ende B angebrachten p, nur die eigene Schwere auf sie. Es sei ferner

$2g$ die Beschleunigung der Schwere, nämlich die Geschwindigkeit, welche ein im luftleeren Raume frei fallender Körper in der ersten Secunde erlangt;

β das Gewicht der körperlichen Einheit der Stange;

P ihr Gesammtgewicht.

Dieses vorausgesetzt, ist $X = 2g$, $\partial m = \frac{\beta}{2g} S \partial x$, $X \partial m = \beta S \partial x$, $\Sigma x = \beta \int\limits_{l \div x} S \partial x$, $\int\limits_{l \div 0} X \partial m = P$, und die Gleichung (3.) geht in

$$\frac{\partial^2 \Delta l}{\partial t^2} = \frac{2g(p+P)}{\beta \int\limits_{l \div 0} S\left(\int\limits_{x \div 0} \frac{p+\Sigma x}{S} \partial x\right) \partial x} \left(\int\limits_{l \div 0} \frac{p+\Sigma x}{S} \partial x - \varepsilon \Delta l\right)$$

über; welche Gleichung mit der in der angeführten Schrift „Über Gleichgewicht etc. §. 196. u. 197." auf anderem Wege gefundenen (wenn man wegen verschiedenen Anfangspuncts und entgegengesetzter Richtung der Abscissen x, in ihr $l-x$ statt x setzt) identisch ist und welche, unter Δl Verkürzung statt Verlängerung verstanden, eben so wohl gilt, wenn die elastische Stange nach der Richtung ihrer Längen-Achse zusammengedrückt, als wenn sie ausgedehnt wird.

Bewegung einer elastischen Stange, welche durch Drehung um die Centrallinie (durch Torsion) hervorgebracht wird.

12.

Eine am Ende A ihrer Länge befestigte elastische Stange (Fig. 2.) werde durch eines oder mehrere Kräftenpaare nach bestimmt gedachter Richtung (wie sie der Pfeil andeutet) um ihre Centrallinie AB so gedreht, dafs diese Linie gerade bleibt. Dieselbe Richtung werde als die der Kräften-Momente, deren Werthe positiv sind, angenommen. AB, die Länge der Centrallinie, sei $=l$, $As=s$, $As'=s+\partial s$, so dafs ∂s der Dicke der zwischen den beiden Normalschnitten an s und s' enthaltenen Normalschicht gleich ist. Nach Verflufs der Zeit t habe der Normalschnitt an s sich um den Winkel γ aus seiner anfänglichen Stellung, und somit der Normalschnitt an s' um den Winkel $\gamma+\partial\gamma$ gedreht.

Das Moment der der Normalschicht zwischen s und s' eigenthümlich angehörigen bewegenden Kräfte, welche sie nach der angegebenen Richtung zu drehen streben, heifse Γ, und das Moment der Spannung des Normalschnitts an s, mit welcher derselbe sich der Drehung widersetzt und welche durch die im Abschnitt sB der Stange angebrachten drehenden Kräfte hervorgebracht wird, sei τ. Wenn s um ∂s zunimmt, geht τ in $\tau+\partial\tau$ über und das Moment der der Normalschicht zwischen s und s' zugehörigen bewegenden Kräfte nach t Zeit-Einheiten der Bewegung ist demnach

$$\Gamma + \partial t,$$

indem ∂t negativ ist, wenn Γ einen positiven Werth hat.

In demselben Zeitmoment ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Normalschnitt an s in der angedeuteten Richtung wirklich sich bewegt, $=\frac{\partial\gamma}{\partial t}$.

Bedeutet nun

∂i die Fläche irgend eines Elements dieses Normalschnitts am Puncte m;

ϱ den Abstand dieses Puncts von der Centrallinie;

∂m die Masse des Elements der Normalschicht am Puncte m:

so ist, wenn übrigens β und g die in (§. 11.) ihnen beigelegte Bedeutung behalten, $\partial m = \frac{\beta}{2g}\partial i\,\partial s$, und $\varrho^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}\partial m = \frac{\beta}{2g}\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}\varrho^2\,\partial i\,\partial s$ ist das Moment der der Winkelgeschwindigkeit des letztern Elements entsprechenden bewegenden Kraft. Daher ist, wenn ferner R statt des im ganzen Umfange des Normalschnitts genommenen Integrals $\int\varrho^2\partial i$ gesetzt wird, $\frac{\beta}{2g}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}R\,\partial s$ das Moment der der Winkelgeschwindigkeit der Normalschicht entsprechenden bewegenden Kraft und

$$\Gamma - \frac{\beta}{2\gamma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}R\,\partial s + \partial\tau$$

das Moment der auf diese Normalschicht verlorenen bewegenden Kraft.

13.

Nach dem Grundsatze von *d'Alambert* müssen nun die Momente der verlornen Kräfte sämmtlicher Normalschichten der elastischen Stange unter sich im Gleichgewicht stehen, oder es mufs das auf die ganze Ausdehnung der Stange bezogene Integral des letztern Ausdrucks für ein solches Moment gleich Null sein. Werden die Momente Γ weggelassen und wird an deren Stelle das Moment Q eines Kräftenpaares, dessen Richtungen in der Ebene des Normalschnitts an B liegen, gesetzt, wodurch $\partial\tau = 0$ oder das Moment der Spannung τ nach s beständig wird: so hat man die Gleichung:

$$4.\qquad Q - \frac{\beta}{2g}\int_{l\div 0}\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}R\,\partial s - \tau = 0;$$

indem das dem Moment Q entgegenwirkende (als positiv gesetzte) Moment τ mit negativem Zeichen zu nehmen ist.

Um den Winkel γ als Function von s auszudrücken, hat man ferner nach dem Grundsatze in (§. 7.), im Zustande der Bewegung, wie im Zustande der ruhenden Spannung:

$$\partial\gamma : \gamma = \frac{\partial s}{R} : \int_{s\div 0}\frac{\partial s}{R}$$

und, wenn γ_1 der Werth von γ für $s = l$ ist:

$$\gamma : \gamma_1 = \int_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} : \int_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} \quad \text{oder} \quad \gamma = \int_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \cdot \frac{\gamma_1}{\int_{l \div 0} \frac{\partial s}{R}}.$$

In demselben Augenblicke aber, in welchem die Normalschnitte an s und B um die Winkel γ und γ_1 sich gedreht haben, ist, wenn unter η die eigenthümliche Spannkraft der Stange gegen Drehung verstanden wird, das Moment der Spannung

$$\tau = \eta R \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{\eta \gamma_1}{\int_{l \div 0} \frac{\partial s}{R}}.$$

Die Gleichung (4.) geht hiernach in

$$Q \int_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} - \eta \gamma_1 - \frac{\beta}{2g} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} \cdot \int_{l \div 0} R \Big(\int_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \Big) \partial s = 0$$

oder in

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} = \frac{2g}{\beta \int_{l \div 0} R \Big(\int_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \Big) \partial s} \Big(Q \int_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} - \eta \gamma_1 \Big)$$

über. Sie enthält in dieser Gestalt nur noch nach t, nicht aber nach s Veränderliche, und ist gleichbedeutend mit der in der angeführten Schrift „Über Gleichgewicht etc." (§. 210.) gefundenen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{2g}{\int_{l \div 0} \frac{\Sigma \varrho s}{R} \partial s} \Big(Q \int_{l \div 0} \frac{\partial s}{R} - \eta \gamma_1 \Big),$$

indem nach der dort angenommenen Bedeutung $\Sigma \varrho s = \beta \int_{l \div s} R \, \partial s$ und

$$\int_{l \div 0} \frac{\Sigma \varrho s}{R} \partial s = \beta \int_{l \div 0} R \Big(\int_{s \div 0} \frac{\partial s}{R} \Big) \partial s \quad \text{ist.}$$

Bewegung einer elastischen Stange, welche durch Biegung hervorgebracht wird.

14.

Eine am Ende A der (ursprünglich geraden) Centrallinie AB befestigte elastische Stange (Fig. 3.) werde durch eine am andern Ende B dieser Linie angebrachte, von B nach P gerichtete Kraft p so gebogen, dafs die Centrallinie mit der Richtung der biegenden Kraft in einer Ebene bleibt. AB, die Länge der Centrallinie, sei $= l$; der von A an gerechnete Bogen $As = s$;

$As' = s + \partial s$. Für die Curve AB nehme man die auf BP senkrechte aB als Achse der x mit dem Anfangspunct in a an, so dafs für $s = 0$ auch $x = 0$ ist; sx sei $= y$, $aB = x_1$. Nach Verflufs der Zeit t habe sich der Theil As der Centrallinie um den Winkel ω, den die beiden Normallinien an A und s mit einander bilden, gebogen und es sei somit der von den Normalschnitten an s und s' eingeschlossene Krümmungswinkel $= \partial\omega$. Die Richtung BP der biegenden Kraft, und folglich jene der Achse der x, werden als im Raume sich parallel bleibend angenommen; aber x und y sind ebenfalls Zeitfunctionen.

So wie die Kraft p mit dem Moment $p(x_1 - x)$ auf den Normalschnitt an s wirkt und denselben um die auf der Ebene der gebogenen Centrallinie senkrechte Biegungs-Achse an s zu drehen strebt, läfst sich auch das Moment der Spannung, mit der dieser Normalschnitt sich der Drehung widersetzt, als das Moment einer im Abstande xB vom Normalschnitt in der Geraden BP von P nach B wirkenden Kraft τ, oder die Spannung selbst als eine reducirte Kraft betrachten, deren Richtung jener der biegenden Kraft p gerade entgegengesetzt ist. Diese reducirte Kraft ist, da der Voraussetzung nach die Stange nur durch die Kraft p gebogen wird, vermöge des Grundsatzes in (§. 7.), in jedem Augenblicke der Bewegung nach s beständig; oder so wie ∂p ist $\partial\tau$ in jedem solchen Augenblicke gleich Null.

Die Bewegung, welche der Normalschnitt an s bei der Biegung annimmt, entsteht durch die Drehung sämmtlicher zwischen s und A enthaltenen Normalschnitte um ihre Biegungs-Achsen. In Bezug auf eine dieser Achsen, am Punct p, sei $s = {}_1s$, und in dem Zeitmoment, von dem es sich hier handelt, $x = {}_1x$, $y = {}_1y$, und der Winkel $\omega = {}_1\omega$. Bezeichnet, wie in (§. 12.), $\partial m = \frac{\beta}{2g}\partial i\,\partial s$ die Masse des Elements am Puncte m der Normalschicht an s, und bedeuten ferner zur Abkürzung

$\underline{s}^2$ das Quadrat $(x - {}_1x)^2 + (y - {}_1y)^2$ der Sehne ps: eine symmetrische Function von s und ${}_1s$, welche sich nicht ändert, wenn in ihr $l - s$ statt s und zugleich $l - {}_1s$ statt ${}_1s$ gesetzt wird;

S den Flächen-Inhalt des Normalschnitts an s und N dessen Drehungsmoment in Bezug auf seine Biegungs-Achse;

${}_1S$ und ${}_1N$ dieselben auf den Normalschnitt an p bezüglichen Gröfsen, welche von S und N nur dadurch sich unterscheiden, dafs in ihnen ${}_1s$ an der Stelle von s steht:

so ist $(pm)^2.\partial m$ das Drehungsmoment des genannten Elements der Normal-

schicht an s in Bezug auf die Biegungs-Achse am Punct p und, wie in der angef. Schrift „Über Gleichgewicht etc. §. 216." gezeigt ist, $(\underline{s}^2.S+N)\frac{\beta}{2g}\partial s$ das Drehungsmoment der Masse der Normalschicht in Bezug auf dieselbe Achse. Das Moment der der Drehung der Normalschicht an s um die Biegungs-Achse am Punct p, wie sie wirklich Statt findet, entsprechenden bewegenden Kraft nach t Zeit-Einheiten der Bewegung ist daher

$$= \frac{\delta^2 \partial_1 \omega}{\delta t^2}(\underline{s}^2.S+N)\frac{\beta}{2g}\partial s.$$

Nun hat man nach dem Grundsatze in (§. 7.)

$$\partial_1\omega : \partial\omega = \frac{x_1 - {}_1x}{{}_1N} : \frac{x_1 - x}{N}$$

und, da während der unendlich kleinen Zeit δt die Abstände $x_1 - {}_1x$ und $x_1 - x$ nur um unendlich kleine Theile sich verändern, auch

$$\frac{\delta^2\partial_1\omega}{\delta t^2} : \frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2} = \frac{x_1 - {}_1x}{{}_1N} : \frac{x_1 - x}{N}, \quad \text{folglich} \quad \frac{\delta^2\partial_1\omega}{\delta t^2} = \frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{x_1 - {}_1x}{x_1 - x}\cdot\frac{N}{{}_1N}.$$

Das eben angeführte Moment läfst sich daher auch

$$= \frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{x_1 - {}_1x}{{}_1x - x}\cdot\frac{N}{{}_1N}(\underline{s}^2.S+N)\frac{\beta}{2g}\partial s$$

setzen und, indem man mit $x_1 - {}_1x$ dividirt, die bewegende Kraft selbst

$$= \frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1 - x}\cdot\frac{\beta}{2g}\left(\frac{\underline{s}^2.{}'S+N}{{}_1N}\right)\partial s.$$

Eine solche Kraft giebt es für jede Biegungs-Achse zwischen A und s, und die Summe dieser Kräfte ist, indem man, was erlaubt ist, $\partial_1 s$ statt ∂s setzt, der von ${}_1s = 0$ bis ${}_1s = s$ zu nehmende Integral-Ausdruck

$$\frac{\delta^2\partial\omega}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1 - x}\cdot\frac{\beta}{2g}\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s = \frac{\delta^2\frac{\partial\omega}{\partial s}}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1 - x}\cdot\frac{\beta}{2g}\partial s\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s,$$

in welchem $\frac{\partial\omega N}{x_1 - x}$ nach s und ${}_1s$ constant ist.

Dieser Ausdruck kann mit vorgesetztem negativen Zeichen, da $\partial\tau = 0$ ist, zugleich als der Ausdruck der auf die Normalschicht an s verlorenen bewegenden Kraft angesehen werden.

15.

Wird, wie es das Princip von *d'Alambert* fordert, die Summe aller verlorenen bewegenden Kräfte im ganzen Umfange der Stange, wozu noch die

Kraft $p-\tau$ zu addiren ist, gleich Null gesetzt, so ergiebt sich die Gleichung

$$(5.)\qquad -\frac{\delta^2\frac{\partial\omega}{\partial s}}{\delta t^2}\cdot\frac{N}{x_1-x}\cdot\frac{\beta}{2g}\int_{l\div 0}\Big(\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s\Big)\partial s+p-\tau = 0,$$

in der die Spannung τ, nach s constant, $=\frac{\varepsilon N}{x_1-x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial s}$ ist, und aus welcher mithin die weitere Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{\delta^2\frac{\partial\omega}{\partial s}}{\delta t^2} = \frac{2g}{\beta\int_{l\div 0}\Big(\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s\Big)\partial s}\Big(p\cdot\frac{x_1-x}{N}-\varepsilon\cdot\frac{\partial\omega}{\partial s}\Big)$$

folgt, welche mit der in der angef. Schrift „Über Gleichgewicht etc. §. 226." auf anderem Wege gefundenen Gleichung, in welcher $-\frac{\partial\omega}{\partial s}$ eben Das, was hier $\frac{\partial\omega}{\partial s}$, und x Das, was hier x_1-x ist, dann übereinstimmt, wenn das dortige Integral

$$\int_{l\div 0}\frac{\Sigma xs}{N}\partial s = \beta\int_{l\div 0}\Big(\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s\Big)\partial s \text{ ist.}$$

16.

Dafs die letztere Gleichheit wirklich Statt hat, läfst sich auf folgende Weise zeigen.

Nach (§§. 214. und 216.) der angeführten Schrift ist

$$\Sigma xs = \beta\int_{s\div 0}(\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N)\,\partial_1 s;$$

wo alle Zeichen dieselbe Bedeutung haben, welche ihnen hier beigelegt ist; mit der Ausnahme, dafs ${}_1s$ und s vom freien Ende B der Centrallinie, nicht vom festen Ende A derselben an gerechnet sind. Setzt man daher $l-{}_1s$ statt ${}_1s$ und $l-s$ statt s, wodurch $\partial_1 s$ in $-\partial_1 s$, ∂s in $-\partial s$ übergeht und $\underline{s}^2$ sich nicht verändert, so wird

$$\Sigma xs = \beta\int_{l\div s}(\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N)\,\partial_1 s \quad\text{und}\quad \int_{l\div 0}\frac{\Sigma xs}{N}\partial s = \beta\int_{l\div 0}\Big(\int_{l\div s}\Big(\frac{\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N}{N}\partial_1 s\Big)\partial s;$$

wo nunmehr ${}_1s$ und s vom festen Ende A der Centrallinie an gerechnet sind; so dafs eben jene Gleichheit darin besteht, dafs

$$\int_{l\div 0}\Big(\int_{l\div s}\frac{\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N}{N}\partial_1 s\Big)\partial s = \int_{l\div 0}\Big(\int_{s\div 0}\frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\partial_1 s\Big)\partial s$$

ist; in welchen beiden Ausdrücken alle Zeichen ganz dieselbe Bedeutung haben.

Es sei nun F eine beliebige Function der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen s und ${}_1s$, welche nach s und ${}_1s$ so integrirt werden soll, dafs, wenn man zuerst nach ${}_1s$ integrirt, das erste Integral von 0 bis s,

und sodann das zweite Integral nach s von 0 bis l, den äufsersten Grenzwerthen von s und ${}_1s$, genommen wird. Wären die Grenzen der Veränderlichen ${}_1s$ unabhängig von s, so liefse sich ohne Weiteres die Ordnung der Integration umkehren und zuerst nach s, und dann nach ${}_1s$ integriren. Da aber die eine Grenze des Integrals nach ${}_1s$ von s abhangt, oder s selbst ist, so müssen die Grenzen des ersten Integrals, wenn es nach s genommen wird, bestimmt werden. Diese Grenzen sind aber keine andern als l und ${}_1s$, oder es mufs bei der ersten Integration s von ${}_1s$ bis l, und bei der zweiten ${}_1s$ von 0 bis l genommen werden. Dafs Dem so sei, zeigt ein Blick auf die nachstehende Zeichen-Gruppirung:

$$\begin{array}{lllll}
F^0_0, & & & & \\
F^0_{\mathrm{I}}, & F^1_{\mathrm{I}}, & & & \\
F^0_{\mathrm{II}}, & F^1_{\mathrm{II}}, & F^2_{\mathrm{II}}, & & \\
F^0_{\mathrm{III}}, & F^1_{\mathrm{III}}, & F^2_{\mathrm{III}}, & F^3_{\mathrm{III}}, & \\
F^0_{\mathrm{IV}}, & F^1_{\mathrm{IV}}, & F^2_{\mathrm{IV}}, & F^3_{\mathrm{IV}}, & F^4_{\mathrm{IV}}, \\
 & & \text{etc.}, & &
\end{array}$$

in welcher die römischen Ziffern auf die Werthe von s, die arabischen auf jene von ${}_1s$ sich beziehen. Die Gröfsen F, welche die Zeichen vorstellen können auf zweierlei Art zusammengezählt werden. In dem einen Falle wir zuerst jede horizontale Reihe für sich summirt und es werden hierauf alle diese Reihen zusammengenommen: im andern Falle wird zuerst jede verticale Reihe für sich summirt und es werden dann alle diese Reihen addirt. Der erste Fall entspricht der Integration zuerst nach ${}_1s$ und dann nach s, der andere der Integration zuerst nach s und dann nach ${}_1s$, und es ist augenscheinlich, dafs in jenem Falle ${}_1s$ von 0 bis s und s von 0 bis l, in diesem aber s von ${}_1s$ bis l und ${}_1s$ von 0 bis l zu nehmen ist. In beiden Fällen mufs die doppelte Summation dasselbe Resultat geben und es mufs demnach

$$\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0} F\,\partial_1 s\Big)\partial s = \int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{l\div {}_1s} F\,\partial s\Big)\partial_1 s$$

sein, oder auch, wenn man im zweiten dieser Ausdrücke, was erlaubt ist, s und ${}_1s$ verwechselt und mit ${}_1F$ die so veränderte Function F bezeichnet:

$$\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0} F\,\partial_1 s\Big)\partial s = \int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{l\div s} {}_1F\,\partial_1 s\Big)\partial s, \text{ daher ferner}$$

$$\int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{s\div 0} \frac{\underline{s}^2.S+N}{{}_1N}\,\partial_1 s\Big)\partial s = \int\limits_{l\div 0}\Big(\int\limits_{l\div s} \frac{\underline{s}^2.{}_1S+{}_1N}{N}\,\partial_1 s\Big)\partial s,$$

indem nämlich bei der Verwechselung von s und ${}_1s$ die Gröfse $\underline{s}^2$ ungeändert bleibt und S und N nur s, ${}_1S$ und ${}_1N$ nur ${}_1s$ enthalten. — Was zu erweisen war.

17.

Die Anwendung des Grundsatzes von *d'Alambert* führt demnach in den drei hier betrachteten Fällen der Bewegung elastischer fester Körper auf dieselben Grundgleichungen der Bewegung, welche in der angeführten Schrift, „Über Gleichgewicht etc." aus einer etwas verschiedenen Anschauungsweise sich ergeben haben, nicht aber auf jene, welche sich in dem genannten Werke von *Poisson* entwickelt finden.

In Bezug auf die Integration der hier dargestellten Grundgleichungen, so wie in Bezug auf einige andere mehr zusammengesetzte Fälle der Bewegung solcher Körper, ist ebenfalls auf die erste Schrift zu verweisen.

Noch mag bemerkt werden, dafs nicht nur die Gleichungen des sogenannten *äufsern* Gleichgewichts der elastischen festen Körper, nämlich des Gleichgewichts, welches zwischen den äufsern spannenden Kräften unter sich bestehen mufs, so wie die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der festen Körper überhaupt, welche durch das Princip von *d'Alambert* auf das Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften bezogen werden und die, so wie jene des äufsern Gleichgewichts, den Körper den sie betreffen in seiner Gesammtheit und als Ganzes umfassen müssen: sondern vermöge des Grundsatzes (§. 7.) zugleich auch die Gleichungen des *innern*, zwischen den spannenden Kräften und der Spannkraft der Körper an ihren Querschnitten bestehenden Gleichgewichts, ebensowohl auf den Zustand der Bewegung der genannten Körper, von der hier die Rede ist, als auf den Zustand des Gleichgewichts derselben Anwendung finden. So müssen z. B. für das innere Gleichgewicht eines gebogenen elastischen Körpers, nach der angeführten Schrift (§. 33.) und mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen, die Gleichungen

$$1)\quad \int u\,\partial i = 0,$$

$$2)\quad \int ut\,\partial i = 0,$$

$$3)\quad \varepsilon m\int u^2\,\partial i - px = 0, \text{ oder nach (§. 215.)}$$

$$-\varepsilon N\frac{\partial\omega}{\partial s} - px = 0$$

Statt finden. Die dritte dieser Gleichungen kann, wenn $\frac{\partial\omega}{\partial s}$ aus der obigen Gleichung (6.) als Zeitfunction abgeleitet ist, dazu dienen, die Kraft p, welche in irgend einem Augenblicke der Bewegung der Spannung des Körpers das Gleichgewicht hält, zu bestimmen. Aus den beiden andern Gleichungen aber, welche von der Zeit unabhängig sind, folgt, dafs die Drehung der Normal-

schnitte des Körpers während der Bewegung stets um dieselben Axen Statt hat, welche für den Zustand der ruhenden Spannung sich ergeben.

Ferner mag hier noch die Andeutung Platz finden, dafs Nichts hindert, die Möglichkeit des gleichzeitigen Nebeneinanderbestehens mehrerer Folgen von Schwingungen in elastischen festen Körpern anzunehmen; so dafs die Schwingungen jeder Folge unter sich gleiche, aber eine andere Dauerzeit als jene der übrigen Folgen haben, und dafs hierin die secundären Töne, welche neben den Haupttönen an diesen Körpern öfters wahrgenommen werden, ihre Erklärung finden können.

Die erwähnten Gleichungen mit partiellen Differentialen, welche im „Traité de Mécanique T. II." mit grofsem Aufwande analytischer Gelehrsamkeit weiter behandelt sind, bilden die Grundlage der Lehre von den Schwingungen der biegsamen Saiten, sowohl als der elastischen festen Körper; wie sie in den Werken der französischen Mathematiker entwickelt und auf den physicalischen Theil der Akustik angewendet ist. Zwar findet man in ihnen häufig zur Bestätigung der Sätze dieser Lehre die Übereinstimmung derselben mit der Erfahrung angeführt; allein eine solche Berufung kann, wie Dem auch sei, einer Theorie, welche erwiesenermafsen auf unrichtigen Vordersätzen beruht, offenbar nicht als Stütze dienen, und der Verfasser dieses Aufsatzes glaubte weder hierdurch, noch durch die hohe Achtung, von der er vor Männern wie *Poisson* und dessen Vorgänger sich durchdrungen fühlt, sich abhalten lassen zu dürfen, seine Bedenken gegen jene Lehre auszusprechen. Überhaupt mag das Gesammt-Ergebnifs der vorstehenden Erörterungen wohl zu dem Ausspruche berechtigen, dafs der genannte Zweig der mathematischen Physik, so weit er auf die Schwingungen der elastischen festen Körper Bezug hat, noch eine gründlichere Ausbildung, als die jetzige Literatur sie aufzuweisen hat, wünschen läfst.

In dem Werke *Eulers:* „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Laus. 1744," findet sich eine Auflösung des Problems von den Transversal-Schwingungen einer elastischen Ruthe, welche von der der französischen Physiker sehr wesentlich abweicht, aber eben so wenig wie diese als befriedigend möchte gelten können. Was *Euler* in „Novi comment. acad. Petrop. T. XV, 1770 und T. XX, 1775" über die obengenannte Art der Bewegung elastischer Körper gegeben hat, trifft dagegen in der Hauptsache mit der französischen Behandlungsweise des Gegenstandes zusammen.

Stuttgart, im Juli 1849.

2.

Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie.

(Par Mr. *Joachimsthal* de Berlin.)

Je me propose dans ce mémoire d'établir par la théorie des déterminants quelques formules relatives à l'aire du triangle et au volume de la pyramide. Les problèmes que j'ai traités sont on ne peut plus simples; mais on accordera peut-être quelque attention à la *méthode* que j'ai employée. Je commence par quelques explications.

On nomme déterminant des n^n quantités

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & \dots & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n & \dots & t_n \end{matrix}$$

le dénominateur commun N qui se présente dans la résolution des n équations de premier degré à n inconnues

$$\begin{aligned} x_1\xi_1 + y_1\eta + z_1\zeta + \dots + t_1\tau &= l_1, \\ x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + \dots + t_2\tau &= l_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n\xi + y_n\eta + z_n\zeta + \dots + t_n\tau &= l_n. \end{aligned}$$

Pour fixer les signes des termes, je supposerai positif le produit $x_1, y_2, z_3, \dots t_n$ qui fait partie de N. On sait que $N=0$ est la condition pour que les équations

$$\begin{aligned} x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + \dots + t_1\tau &= 0, \\ x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + \dots + t_2\tau &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n\xi + y_n\eta + z_n\zeta + \dots + t_n\tau &= 0 \end{aligned}$$

soient compatibles entre elles. Les calculs suivants étant presque tous des applications continuelles du théorème de la multiplication des déterminants, je vais expliquer rapidement ce théorème pour éviter aux lecteurs la peine de le chercher ailleurs.

En écrivant comme suit

$$l_{0,0}=x\xi+y\eta+z\zeta,\quad l_{1,0}=x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta,\quad l_{2,0}=x_2\xi_1+y_2\eta+z_2\zeta,$$
$$l_{0,1}=x\xi_1+y\eta_1+z\zeta_1,\quad l_{1,1}=x_1\xi_1+y_1\eta_1+z_1\zeta_1,\quad l_{2,1}=x_2\xi_1+y_2\eta_1+z_2\zeta_1,$$
$$l_{0,2}=x\xi_2+y\eta_2+z\zeta_2,\quad l_{1,2}=x_1\xi_2+y_1\eta_2+z_1\zeta_2,\quad l_{2,2}=x_2\xi_2+y_2\eta_2+z_2\zeta_2;$$

je dis qu'on aura

$$(1.)\qquad \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{Bmatrix}.\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{Bmatrix} = \text{dét.}\begin{Bmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & l_{0,2} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & l_{1,2} \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{Bmatrix},$$

ou bien

$$(2.)\qquad \{x(y_1z_2-z_1y_2)+y(z_1x_2-x_1z_2)+z(x_1y_2-x_2y_1)\}\{\xi(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)$$
$$+\eta(\zeta_1\xi_2-\xi_1\zeta_2)+\zeta(\eta_1\xi_2-\xi_1\eta_2)\}$$
$$=l_{0,0}(l_{1,1}l_{2,2}-l_{2,1}l_{1,2})+l_{1,0}(l_{2,1}l_{0,2}-l_{0,1}l_{2,2})+l_{2,0}(l_{0,1}l_{1,2}-l_{1,1}l_{0,2});$$

et la formule analogue convient également aux déterminants d'un ordre quelconque. On peut la démontrer en resolvant de deux manières différentes les équations

$$h=xU+yV+zW,\qquad U=\xi u+\xi_1v+\xi_2w,$$
$$h_1=x_1U+y_1V+z_1W,\qquad V=\eta u+\eta_1v+\eta_2w,$$
$$h_2=x_2U+y_2V+z_2W,\qquad W=\zeta u+\zeta_1v+\zeta_2w,$$

u, v, w étant les inconnues. En effet, on peut commencer par substituer les valeurs de U, V, W dans le premier système, ou en exprimant U, V, W à l'aide du premier système; on substituera ensuite les expressions trouvées dans le second système. En comparant les valeurs de u, v, w obtenues par ces deux méthodes, ou seulement les dénominateurs, on tombera immédiatement dans la formule (1.).

Un cas particulier mérite encore quelque attention. Supposant

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad \text{etc. etc.};$$

mettant de plus

$$s_0=x^2+y^2+z^2,\qquad p_{0,1}=xx_1+yy_1+zz_1,$$
$$s_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\qquad p_{0,2}=xx_2+yy_2+zz_2,$$
$$s_2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,\qquad p_{1,2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

les formules (1.) et (2.) deviendront:

$$(3.)\qquad \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{Bmatrix}^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} s_0 & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 \end{Bmatrix};$$

$$(4.)\qquad \{x(y_1z_2-z_1y_2)+y(z_1x_2-x_1z_2)+z(x_1y_2-y_1x_2)\}^2$$
$$=s_0s_1s_2-s_0p_{1,2}^2-s_1p_{0,2}^2-s_2p_{0,1}^2+2p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2}.$$

On a également

$$(5.)\qquad \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{Bmatrix}^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} s_0 & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 & p_{2,3} \\ p_{0,3} & p_{1,3} & p_{2,3} & s_3 \end{Bmatrix}$$

La valeur du déterminant à droite est

$$\begin{aligned}(5\text{ bis.})\qquad & s_0 s_1 s_2 s_3 - s_0 s_1 p_{2,3}^2 - s_2 s_3 p_{0,1}^2 + 2 s_0 p_{1,2} p_{1,3} p_{2,3} + p_{0,1}^2 p_{2,3}^2 - 2 p_{0,1} p_{2,3} p_{0,2} p_{1,3} \\ & - s_0 s_2 p_{1,3}^2 - s_1 s_3 p_{0,2}^2 + 2 s_1 p_{0,2} p_{0,3} p_{2,3} + p_{0,2}^2 p_{1,3}^2 - 2 p_{0,1} p_{2,3} p_{0,3} p_{1,2} \\ & - s_0 s_3 p_{1,2}^2 - s_1 s_2 p_{0,3}^2 + 2 s_2 p_{0,1} p_{0,3} p_{1,3} + p_{0,3}^2 p_{1,2}^2 - 2 p_{0,2} p_{1,3} p_{0,3} p_{1,2} \\ & + 2 s_3 p_{0,1} p_{0,2} p_{1,2}.\end{aligned}$$

Toutes ces relations seront applicables aux formules de Géométrie analytique qui se présentent sous la forme des déterminants. Je n'en citerai que deux; savoir, celle de l'aire du triangle et celle du volume de la pyramide triangulaire exprimés par les coordonnées rectangulaires des sommets. Soit A l'aire du triangle formé par les points (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), on a

$$(6.)\qquad \pm 2A = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y - x y_2 + x y_1 - x_1 y = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Bmatrix};$$

ou bien, l'origine étant un des sommets,

$$\pm 2A = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{Bmatrix}.$$

Le volume de la pyramide dont un des sommets est à l'origine, peut être exprimé par la formule connue

$$\pm 6P = x(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y(z_1 x_2 - x_1 z_2) + z(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{Bmatrix},$$

et dans le cas général par:

$$(7.)\qquad \pm 6P = \begin{Bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Ces préliminaires posés, j'entre en matière.

2.

Problème. Exprimer l'aire d'un triangle au moyen des équations des trois côtés.

Soient

$$(8.)\quad \begin{cases} l\xi + m\eta + n = 0, \\ l'\xi + m'\eta + n' = 0, \\ l''\xi + m''\eta + n'' = 0 \end{cases}$$

les équations des côtés, et (x, y) le point d'intersection de la seconde et de la troisième droite, (x', y') le sommet opposé à la seconde droite, et (x'', y'') le troisième sommet du triangle. On aura évidement les neuf équations:

$$\begin{array}{lll} lx + my + n = p, & l'x + m'y + n' = 0, & l''x + m''y + n'' = 0, \\ l'x + m'y + n' = 0, & l'x' + m'y' + n' = p', & l''x' + m''y' + n'' = 0, \\ l''x + m''y + n'' = 0, & l''x'' + m''y'' + n'' = 0, & l''x'' + m''y'' + n'' = p'', \end{array}$$

où p, p', p'' désignent trois quantités, différentes de zéro, dont nous déterminerons les valeurs ci-après.

Formons les déterminants des côtés à gauche et des côtés à droite, et égalons ces expressions. Le déterminant des côtés à droite

$$\begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p'' \end{matrix}$$

est $pp'p''$. Le déterminant des côtés à gauche est, suivant (1.), décomposable en deux facteurs

$$\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{Bmatrix} \text{dét.}\begin{Bmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{Bmatrix},$$

dont le premier est au signe près la double aire du triangle donné, ou bien $= \pm 2A$. En écrivant

$$(9.)\quad N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{Bmatrix} = l(m'n'' - m''n') + l'(m''n - mn'') + l''(mn' - m'n),$$

on aura

$$(10.)\quad \pm 2NA = pp'p''.$$

On trouvera la valeur de p en éliminant x et y des équations

$$\begin{aligned} lx + my + n - p &= 0, \\ l'x + m'y + n' &= 0, \\ l''x + m''y + n'' &= 0, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, en substituant $n - p$ à n dans l'équation $N = 0$. Cela donne

$$N = (l'm''-m'l'')p \text{ et également}$$
$$N = (l''m-lm'')p',$$
$$N = (lm'-ml')p'';$$

$$(11.)\quad A = \pm\tfrac{1}{2}\frac{N^2}{(l'm''-m'l'')(l''m-m''l)(lm'-ml')} = \pm\tfrac{1}{2}\frac{N^2}{\frac{\partial N}{\partial n}\frac{\partial N}{\partial n'}\frac{\partial N}{\partial n''}}.$$

Corollaire. Il est aisé de trouver maintenant les valeurs des côtés.

Soit f la longueur du côté représenté par la première équation (8.) et π la hauteur correspondante, on aura

$$f\pi = 2A;\qquad \pi = \pm\frac{lx+my+n}{\sqrt{(l^2+m^2)}} = \pm\frac{p}{\sqrt{(l^2+m)}} = \pm\frac{N}{\frac{\partial N}{\partial n}\sqrt{(l^2+m^2)}},$$

d'où

$$f = \pm\frac{\sqrt{(l^2+m^2)}N}{\frac{\partial N}{\partial n'}\frac{\partial N}{\partial n''}}.$$

3.

Problème. Trouver le volume d'une pyramide triangulaire des équations des faces.

Soient

$$(12.)\quad \begin{cases} a\xi+a'\eta+a''\zeta+a''' = 0,\\ b\xi+b'\eta+b''\zeta+b''' = 0,\\ c\xi+c'\eta+c''\zeta+c''' = 0,\\ d\xi+d'\eta+d''\zeta+d''' = 0 \end{cases}$$

les équations des quatre faces, et (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z''), (x''',y''',z''') les sommets respectivement opposés. On pourra établir seize équations analogues aux neuf équations du No. précédent, et on obtiendra par le même procédé

$$(13.)\quad \text{dét.}\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a'''\\ b & b' & b'' & b'''\\ c & c' & c'' & c'''\\ d & d' & d'' & d''' \end{pmatrix}\cdot\text{dét.}\begin{pmatrix} x & y & z & 1\\ x' & y' & z' & 1\\ x'' & y'' & z'' & 1\\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{pmatrix} = pp'p''p''',$$

où

$$p = ax+a'y+a''z+a''',$$
$$p' = bx+b'y+b''z+b''' \text{ etc. etc.}$$

En désignant par N le premier déterminant de la formule (12.), on aura

$$N = a''' \frac{\partial N}{\partial a'''} + b''' \frac{\partial N}{\partial b'''} + c''' \frac{\partial N}{\partial c'''} + d''' \frac{\partial N}{\partial d'''},$$

N étant linéaire par rapport aux quantités a''', b''', c''', d'''. Mais comme p est donné par l'équation $N=0$, où a''' a été remplacé par $a'''-p$, on trouvera

$$p = \frac{N}{\frac{\partial N}{\partial a'''}}; \quad p' = \frac{N}{\frac{\partial N}{\partial b'''}}; \quad p'' = \frac{N}{\frac{\partial N}{\partial c'''}}; \quad p''' = \frac{N}{\frac{\partial N}{\partial d'''}}.$$

Le second déterminant de (13.) est au signe près, six fois le volume P de la pyramide, comme je l'ai indiqué dans l'introduction, donc nous aurons

$$(14.)\qquad P = \pm \tfrac{1}{6} \frac{N^3}{\frac{\partial N}{\partial a'''} \frac{\partial N}{\partial b'''} \frac{\partial N}{\partial c'''} \frac{\partial N}{\partial d'''}}.$$

Voilà la formule demandée.

Corollaire. Si A, B, C, D sont les aires des quatre faces correspondantes aux quatre équations (12.); et si π est la hauteur abaissée sur A, on aura les équations suivantes:

$$3P = \pi A; \quad \pi = \pm \frac{ax+a'y+a''z+a'''}{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)}} = \pm \frac{p}{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)}}$$
$$= \pm \frac{N}{\frac{\partial N}{\partial a'''}\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)}};$$

par conséquent

$$(15.)\quad \begin{cases} A = \pm \tfrac{1}{2} N^2 \dfrac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)}}{\frac{\partial N}{\partial a'''} \frac{\partial N}{\partial c'''} \frac{\partial N}{\partial d'''}} \text{ et également} \\ B = \pm \tfrac{1}{2} N^2 \dfrac{\sqrt{(b^2+b'^2+b''^2)}}{\frac{\partial N}{\partial a'''} \frac{\partial N}{\partial c'''} \frac{\partial N}{\partial d'''}}, \\ C = \pm \tfrac{1}{2} N^2 \dfrac{\sqrt{(c^2+c'^2+c''^2)}}{\frac{\partial N}{\partial a'''} \frac{\partial N}{\partial b'''} \frac{\partial N}{\partial d'''}}, \\ D = \pm \tfrac{1}{2} N^2 \dfrac{\sqrt{(d^2+d'^2+d''^2)}}{\frac{\partial N}{\partial a'''} \frac{\partial N}{\partial b'''} \frac{\partial N}{\partial c'''}}. \end{cases}$$

Voilà les expressions des faces.

En comparant le produit ABC à P^2, on a

$$(16.)\quad P^2 = \pm \tfrac{2}{9} ABC \sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)} \sqrt{(b^2+b'^2+b''^2)} \sqrt{(c^2+c'^2+c''^2)} \frac{\partial N}{\partial d'''}.$$

Supposons (ce qui est évidemment permis) que a, a', a'' soient les cosinus des angles que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la face A fait avec les axes positifs; et ainsi pour B et C. Nommons en outre l, m, n les angles dièdres de la pyramide entre B et C, C et A, A et B et prenons l'origine dans l'intérieur de la pyramide, on aura

$$a^2+a'^2+a''^2 = b^2+b'^2+b''^2 = c^2+c'^2+c''^2 = 1;$$
$$bc+b'c'+b''c'' = -\cos l; \quad ca+c'a'+c''a'' = -\cos m;$$
$$ab+a'b'+a''b'' = -\cos n.$$

En formant le déterminant N on trouve

$$\frac{\partial N}{\partial d'''} = a(b'c''-b''c')+b(c'a''-c''a')+c(a'b''-b'a'').$$

Le carré de cette expression se transforme à l'aide de (4.) en

$$\begin{aligned}(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)-(a^2+a'^2+a''^2)(bc+b'c'+b''c'')^2\\ -(b^2+b'^2+b''^2)(ca+c'a'+c''a'')-(c^2+c'^2+c''^2)(ab+a'b'+a''b'')\\ +2(ab+a'b'+a''b)(ac+a'c'+a''c'')(bc+b'c'+b''c'')\\ = 1-\cos l^2-\cos m^2-\cos n^2-2\cos l\cos m\cos n\end{aligned}$$

et il en résulte

$$(17.)\qquad P^2 = \tfrac{2}{9}ABC\sqrt{(1-\cos l^2-\cos m^2-\cos n^2-2\cos l\cos m\cos n)}:$$

formule qui exprime le volume d'une pyramide par trois faces et les angles dièdres qu'elles forment.

Comme je reviendrai plus tard à la pyramide, je passerai à présent à d'autres problèmes qui peuvent être résolus par les formules (3.) et (4.).

4.

Problème. Trouver le rayon du cercle qui passe par trois points donnés.

La seule difficulté est ici de trouver un procédé symétrique pour l'élimination de α et β entre les trois équations:

$$(18.)\qquad \begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2 = 0,\\ (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-r^2 = 0,\\ (x''-\alpha)^2+(y''-\beta)^2-r^2 = 0.\end{cases}$$

Mettons

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x-\alpha & y-\beta & r\sqrt{-1}\\ x'-\alpha & y'-\beta & r\sqrt{-1}\\ x''-\alpha & y''-\beta & r\sqrt{-1}\end{Bmatrix},$$

on aura suivant (3.) et (4.)

$$N^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} s_0 & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} s_0 = (x-\alpha^2)+(y-\beta^2)-r^2, \\ p_{0,1} = (x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)-r^2, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Mais, en ayant égard aux équations (18.), il vient

$$s_0 = s_1 = s_2 = 0$$

et

$$-2p_{0,1}+s_0+s_1 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2,$$

donc

$$p_{0,1} = -\tfrac{1}{2}\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\} = -\tfrac{1}{2}h^2,$$

et de même

$$p_{0,2} = -\tfrac{1}{2}g^2; \quad p_{1,2} = -\tfrac{1}{2}f^2;$$

f, g, h étant les trois côtés du triangle formé par les points donnés. Il en résulte

$$N^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}h^2 & -\tfrac{1}{2}g^2 \\ -\tfrac{1}{2}h^2 & 0 & -\tfrac{1}{2}f^2 \\ -\tfrac{1}{2}g^2 & -\tfrac{1}{2}f^2 & 0 \end{Bmatrix} = -\tfrac{1}{4}f^2g^2h^2.$$

Mais on a *)

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x-\alpha & y-\beta & r\sqrt{-1} \\ x'-\alpha & y'-\beta & r\sqrt{-1} \\ x''-\alpha & y''-\beta & r\sqrt{-1} \end{Bmatrix} = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & r\sqrt{-1} \\ x' & y' & r\sqrt{-1} \\ x'' & y'' & r\sqrt{-1} \end{Bmatrix}$$

$$= \sqrt{-1}\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{Bmatrix} = 2r\sqrt{-1}.A;$$

A étant l'aire du triangle; donc $-\tfrac{1}{4}f^2g^2h^2 = (2r\sqrt{-1}.A)^2$, ou bien

$$(19.) \quad r = \frac{fgh}{4A}.$$

Corollaire. La formule précédente, qui exprime un théorème bien connu, conduit immédiatement à l'équation du rayon d'un cercle qui en touche trois autres.

---

*) Pour éclaircir la réduction suivante à ceux dont la théorie des déterminants n'est pas familière, je remarque qu'on a

$$\text{dét}\begin{Bmatrix} x+l & y & z \\ x'+l & y' & z' \\ x''+l & y'' & z'' \end{Bmatrix} = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{Bmatrix} + \text{dét.}\begin{Bmatrix} l & y & z, \\ l & y' & z', \\ l & y'' & z'', \end{Bmatrix}$$

parceque'un déterminant est une fonction lineaire par rapport aux éléments d'une colonne horizontale ou verticale. Si l'on a $z = z' = z''$, le second déterminant à droit s'évanouit, deux des colonnes verticales étant composées d'élements égaux.

Soient O le centre et ϱ le rayon du cercle qui touche de la même manière les trois circonférences supposées extérieures les unes aux autres; soient de plus a et b deux points de contact, r et r' les rayons des circonférences correspondantes, et A et B leurs centres. Dans les deux triangles AOB, aOb qui ont l'angle O en commun, on aura

$$(19^*.)\qquad \sin\tfrac{1}{2}O = \tfrac{1}{2}\frac{ab}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{AB^2-(AO-BO)^2}{AO.BO}\right)}.$$

Mais $AO-BO=\pm(r-r')$, et la racine du numérateur sera la longeur de la tangente commune externe prise entre ses deux points de contact. Donc, en désignant par F, G, H les distances des centres A, B, C aux centre du cercle demandé, par f, g, h les tangentes communes externes définies comme ci-dessus, et par f', g', h' les distances bc, ca, ab où a, b, c sont les points de contact des circonférences (O) et (A), (B), (C), on aura suivant (19*.)

$$\frac{f'}{\varrho}=\frac{f}{\sqrt{(GH)}};\quad \frac{g'}{\varrho}=\frac{g}{\sqrt{(FH)}};\quad \frac{h'}{\varrho}=\frac{h}{\sqrt{(FG)}}$$

et à cause de (19.)

$$f'^2g'^2h'^2 = \varrho^2\{(f'+g'+h')(f'+g'-h')(f'-g'+h')(-f'+g'+h')\},$$

où l'aire A est exprimée par les côtés. En y substituant les valeurs précédentes, on obtient

$$(19\,\text{bis.})\qquad f^2g^2h^2 =$$
$$(f\sqrt{F}+g\sqrt{G}+h\sqrt{H})(f\sqrt{F}+g\sqrt{G}-h\sqrt{H})(f\sqrt{F}-g\sqrt{G}+h\sqrt{H})(-f\sqrt{F}+g\sqrt{G}+h\sqrt{H}).$$

Cette formule remarquable donne le rayon ϱ, parceque les trois distances inconnues F, G, H dépendent des quatre rayons ϱ, r, r', r'' par les relations

$$\begin{aligned} F &= \varrho\pm r,\\ G &= \varrho\pm r',\\ H &= \varrho\pm r''. \end{aligned}$$

Si le cercle cherché ne touche pas toutes les circonférences de la même manière, deux des quantités f, g, h deviendront des tangentes communes internes. Si les cercles ne sont pas extérieurs les uns aux autres, il faut faire les changements nécessaires, qu'on trouvera sans difficulté.

Corollaire 2e. Le procédé symétrique dont nous avons fait usage, fournit aussi des moyens pour la resolution d'un problème relatif à l'ellipse, analogue à celui que nous venons de développer.

5.

Problème. Déterminer l'aire d'un triangle inscrit à une ellipse.

Soient (x, y), (x', y'), (x'', y'') trois points de l'ellipse

$$(21.)\quad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1 = 0;$$

f, g, h les cordes entre ces points respectivement opposés à eux, D, D', D'' les trois demi-diamètres parallèles à f, g, h et A l'aire du triangle inscrit. Mettons

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & \sqrt{-1} \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & \sqrt{-1} \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & \sqrt{-1} \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{-1}}{ab}A;$$

donc

$$N^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} s_0 & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 \end{Bmatrix} \text{ où } \begin{cases} s_0 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1, \\ p_{0,1} = \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1 \text{ etc. etc.} \end{cases}$$

En ayant égard à l'équation de l'ellipse, on aura $s_0 = s_1 = s_2 = 0$ et $N^2 = 2p_{0,1}\,p_{0,2}\,p_{1,2}$. Mais

$$-2p_{0,1}+s_0+s_1 = \frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2} = \frac{h^2}{D''^2},$$

ou bien

$$p_{0,1} = -\tfrac{1}{2}\frac{h^2}{D''^2}, \quad \text{et} \quad N^2 = 2p_{0,1}\,p_{0,2}\,p_{1,2} = -\tfrac{1}{4}\frac{f^2g^2h^2}{D^2D'^2D''^2}.$$

Il suit de là

$$(22.)\quad A = \tfrac{1}{4}ab\frac{fgh}{DD'D''}$$

c'est à dire:

La double aire d'un triangle inscrit à une ellipse est au produit des axes comme le produit des côtés au produit des diamètres parallèles.

Corollaire 1er. Pour un cercle qui passe par les mêmes points on aura

$$a = b = D = D' = D'' = r,$$

r étant le rayon du cercle: donc

$$A = \frac{fgh}{4r}$$

En divisant cette relation qui n'est pas autre que (19.), par la formule (22.)

on en tire

$$(23.) \qquad r = \frac{DD'D''}{ab},$$

c'est à dire:

Le rayon d'un cercle qui passe par trois points d'une ellipse est égal au produit des demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle inscrit, divisé par le produit des demi-axes *).

Corollaire 2ᵉ. L'équation de la conique, rapportée à un des foyers comme origine,

$$x^2+y^2-\lambda^2(x+p)^2 = 0$$

se prète à un calcul analogue à celui que nous venons de développer. Soient s, t, u trois cordes menées par le foyer et parallèles aux trois côtés d'un triangle inscrit, O une quatrième corde passant par le foyer et perpendiculaire au grand axe, et r le rayon du cercle qui passe par les sommets du triangle inscrit, on aura

$$(24.) \qquad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{stu}{O}\right)}.$$

Corollaire 3ᵉ. Les formules précédentes sont susceptibles d'une généralisation que j'expliquerai rapidement.

Soit

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1 = 0$$

l'équation d'une conique, et soient (x, y), (x', y'), (x'', y'') trois points quelconques situés ou non sur la conique. Mettons

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = s, \qquad \frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}-1 = p_{1,2},$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1 = s', \qquad \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{a^2}-1 = p_{2,0},$$

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-1 = s'', \qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1 = p_{0,1}.$$

---

*) Voir ce Journal Vol. XXXIX. pg. 138 où j'ai donné une démonstration géométrique de ce théorème fondée sur la théorie de la projection orthogonale; ce qu'on pourrait faire encore pour d'autres théorèmes du mémoire actuel. Pour mettre d'accord le texte de la démonstration avec les figures, il faut lire „Concevons le cercle dont l'ellipse est la proj. orthogonale, au lieu de Projetons l'ellipse de manière qu'elle devienne un cercle."

Mettons de plus

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & 1 \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & 1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1 \end{Bmatrix} = \pm 2\frac{A}{ab},$$

$$N' = \text{dét.}\begin{Bmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & -1 \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1 \end{Bmatrix} = \mp 2\frac{A}{ab},$$

A étant l'aire du triangle formé par les trois points, on a

$$NN' = -\frac{4A^2}{a^2b^2}.$$

Mais en vertu de (1.)

$$NN' = \text{det.}\begin{Bmatrix} s & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 \end{Bmatrix},$$

donc

$$(25.)\quad A = \tfrac{1}{2}(ab)\{-s_0s_1s_2+sp_{1,2}^2+s_1p_{0,2}^2+s_2p_{0,1}^2-2p_{0,1}p_{0,2}p_{1,2}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule embrasse un grand nombre de cas. Pour un triangle inscrit, on a $s=s_1=s_2=0$ et on retrouve les formules déjà developpées. Pour trois points conjugués, c'est à dire pour trois points tels que la polaire de chacun passe par les deux autres, on a $p_{0,1}=p_{0,2}=p_{1,2}=0$, et $A=\frac{1}{2}(ab)(-ss_1s_2)^{\frac{1}{2}}$. Mais l'expression $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ désigne la distance d'un point au centre de la conique, divisée par le demi-diamètre dont la direction coïncide avec cette distance; donc:

e, e_1, e_2 étant les distances de trois points conjugués au centre de la conique, d, d_1, d_2 les demi-diamètres dont les directions coïncident avec e, e_1, e_2: l'aire du triangle entre ces points conjugués sera égale à

$$(26.)\quad A = \tfrac{1}{2}ab\sqrt{\left(-\left(\frac{e^2}{d^2}-1\right)\left(\frac{e_1^2}{d_1^2}-1\right)\left(\frac{e_2^2}{d_2^2}-1\right)\right)};$$

a et b étant les axes de la conique.

Passons maintenant à la sphère et à la pyramide.

6.

Problème. Trouver le rayon de la sphère qui passe par quatre points donnés.

Soient λ la distance des points (x_3, y_3, z_3) et (x, y, z),
λ' celle entre (x_2, y_2, z_2) et (x_1, y_1, z_1);
μ la distance des points (x_3, y_3, z_3) et (x_1, y_1, z_1),
μ' celle entre (x_2, y_2, z_2) et (x, y, z);
ν la distance des points (x_3, y_3, z_3) et (x_2, y_2, z_2),
ν' celle entre (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1);

alors λ et λ', μ et μ', ν et ν' seront des arêtes opposées de la pyramide triangulaire entre les quatre points donnés. Le procédé d'élimination de α, β, γ entre les quatre équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2 = 0,$$
$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2-r^2 = 0,$$
$$(x_2-\alpha)^2+(y_2-\beta)^2+(z_2-\gamma)^2-r^2 = 0,$$
$$(x_3-\alpha)^2+(y_3-\beta)^2+(z_3-\gamma)^2-r^2 = 0$$

est le même que celui du No. (4.). Posons

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma & r\sqrt{-1} \\ x_1-\alpha & y_1-\beta & z_1-\gamma & r\sqrt{-1} \\ x_2-\alpha & y_2-\beta & z_2-\gamma & r\sqrt{-1} \\ x_3-\alpha & y_3-\beta & z_3-\gamma & r\sqrt{-1} \end{Bmatrix} = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z & r\sqrt{-1} \\ x_1 & y_1 & z_1 & r\sqrt{-1} \\ x_2 & y_2 & z_2 & r\sqrt{-1} \\ x_3 & y_3 & z_3 & r\sqrt{-1} \end{Bmatrix}$$
$$= \pm 6rP\sqrt{-1},$$

P étant le volume de la pyramide triangulaire. Or en vertu de (5.)

$$N^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} s & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 & p_{2,3} \\ p_{0,3} & p_{1,3} & p_{2,3} & s_3 \end{Bmatrix} = \text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\nu'^2 & -\frac{1}{2}\mu'^2 & -\frac{1}{2}\lambda^2 \\ -\frac{1}{2}\nu'^2 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda'^2 & -\frac{1}{2}\mu^2 \\ -\frac{1}{2}\mu'^2 & -\frac{1}{2}\lambda'^2 & 0 & -\frac{1}{2}\nu^2 \\ -\frac{1}{2}\lambda^2 & -\frac{1}{2}\mu^2 & -\frac{1}{2}\nu^2 & 0 \end{Bmatrix};$$

car $s = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2 = 0$ et de même s_1, s_2, s_3; et

$$2p_{0,1} = 2(x-\alpha)(x_1-\alpha)+2(y-\beta)(y_1-\beta)+2(z-\gamma)(z_1-\gamma)-2r^2$$
$$= -\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\}+s_0+s_1 = -r'^2$$

et de même pour $p_{0,2}$, $p_{0,3}$, $p_{1,2}$, $p_{1,3}$, $p_{2,3}$. Il suit de là

$$-36r^2P^2 = \tfrac{1}{16}\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & -\nu'^2 & -\mu'^2 & -\lambda^2 \\ -\nu'^2 & 0 & -\lambda'^2 & -\mu^2 \\ -\mu'^2 & -\lambda'^2 & 0 & -\nu^2 \\ -\lambda^2 & -\mu^2 & -\nu^2 & 0 \end{Bmatrix}.$$

La valeur du dernier déterminant se transcrit de (5 bis), et on obtient

$$-(24rP)^2 = \lambda^4\lambda'^4 + \mu^4\mu'^4 + \nu^4\nu'^4 - 2\mu^2\mu'^2\nu^2\nu'^2 - 2\nu^2\nu'^2\lambda^2\lambda'^2 - 2\lambda^2\lambda'^2\mu^2\mu'^2,$$

$$(27.)\quad r = \frac{1}{24P}\sqrt{((\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')(\lambda\lambda'+\mu\mu'-\nu\nu')(\lambda\lambda'-\mu\mu'+\nu\nu')(-\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'))}.$$

Mr. *Crelle* a donné le premier la forme remarquable de cette relation qu'on tire sans peine du procédé d'élimination dont nous avons fait usage.

Corollaire 1er. On peut obtenir une formule analogue à (22.) relative au volume d'une pyramide triangulaire inscrite à un ellipsoïde. Soient les quatre points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) etc., sur l'ellipsoïde

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et L, L', M, M', N, N' les demi-diamètres parallèles aux arêtes λ, λ', μ, μ', ν, ν'; on trouve par un calcul semblable à celui du No. (15.), pour le volume de la pyramide:

$$(28.)\quad P = \tfrac{1}{24}(abc)\Big\{\Big(\frac{\lambda\lambda'}{LL'} + \frac{\mu\mu'}{MM'} + \frac{\nu\nu'}{NN'}\Big)\Big(\frac{\lambda\lambda'}{LL'} + \frac{\mu\mu'}{MM'} - \frac{\nu\nu'}{NN'}\Big) \times \Big(\frac{\lambda\lambda'}{LL'} - \frac{\mu\mu'}{MM'} + \frac{\nu\nu'}{NN'}\Big)\Big(-\frac{\lambda\lambda'}{LL'} + \frac{\mu\mu'}{MM'} + \frac{\nu\nu'}{NN'}\Big)\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Désignons le radical de cette formule par T et celui de (27.) par S, le rayon de la sphère qui passe par quatre points de l'ellipsoïde sera

$$(29.)\quad r = \frac{1}{abc}\,\frac{S}{T}.$$

Si les quatre points, au lieu d'être situés sur la surface, forment un système de points conjugués, le volume de la pyramide déterminée par eux, sera

$$(30.)\quad P = \tfrac{1}{6}(abc)\sqrt{\Big(-\Big(\frac{e^2}{d^2}-1\Big)\Big(\frac{e_1^2}{d_1^2}-1\Big)\Big(\frac{e_2^2}{d_2^2}-1\Big)\Big(\frac{e_3^2}{d_3^2}-1\Big)\Big)}.$$

e, e_1, e_2, e_3 sont les distances des quatre points au centre de la surface et d, d_1, d_2, d_3 les demi-diamètres dont les directions coïncident avec celles des distances. — En passant je remarque que les trois sommets d'un triangle peuvent toujours être considérés comme trois points conjugués par rapport à un cercle à centre réel et à rayon réel ou imaginaire, ce qui n'a pas lieu pour la pyramide et la sphère, à moins que les quatre hauteurs ne se rencontrent en un seul point.

Corollaire 2e. J'ajouterai encore une formule relative au volume P d'une pyramide, dont un sommet est au centre de l'ellipsoïde et les trois autres sur la surface même.

Posons

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & \frac{z}{c} \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & \frac{z'}{c} \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & \frac{z''}{c} \end{Bmatrix} = \pm\tfrac{1}{6}\,\frac{P}{abc}.$$

Soient λ, μ, ν les trois côtés de la base, opposés aux sommets (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') respectivement, et L, M, N les demi-diamètres respectivement parallèles, on aura

$$\frac{\lambda^2}{L^2} = \frac{(x'-x'')^2}{a^2} + \frac{(y'-y'')^2}{b^2} + \frac{(z'-z'')^2}{c^2}$$
$$= 2\Big(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2} - \frac{z'z''}{c^2}\Big)$$

et de même pour $\frac{\mu^2}{M^2}$, $\frac{\nu^2}{N^2}$; ou bien

$$\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda^2}{L^2},$$
$$\frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} + \frac{z''z}{c^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu^2}{M^2},$$
$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\nu^2}{N^2}.$$

Mais

$$N_0^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} s & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{0,1} & s_1 & p_{1,2} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & s_2 \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} s = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ etc.,} \\ p_{0,1} = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\nu^2}{N^2}, \end{cases} \text{ donc}$$

$$\Big(\pm\frac{6P}{abc}\Big)^2 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} 1 & 1-\tfrac{1}{2}\frac{\nu^2}{N^2} & 1-\tfrac{1}{2}\frac{\mu^2}{M^2} \\ 1-\tfrac{1}{2}\frac{\nu^2}{N^2} & 1 & 1-\tfrac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L^2} \\ 1-\tfrac{1}{2}\frac{\mu^2}{M^2} & 1-\tfrac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L^2} & 1 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{\lambda^4}{4L^4} - \frac{\mu^4}{4M^4} - \frac{\nu^4}{4N^4} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2L^2M^2} + \frac{\lambda^2\nu^2}{2L^2N^2} + \frac{2\mu^2\nu^2}{2M^2N^2} - \frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{4L^2M^2N^2},$$

donc

$$(31.)\quad P = \tfrac{1}{12}(abc)\Big\{\Big(\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}+\frac{\nu}{N}\Big)\Big(\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}-\frac{\nu}{N}\Big)\Big(\frac{\lambda}{L}-\frac{\mu}{M}+\frac{\nu}{N}\Big)$$
$$\times\Big(-\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}+\frac{\nu}{N}\Big) - \frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{L^2M^2N^2}\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons les trois points (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') sur un plan diamétral, on aura $P = 0$, et

$$(32.)\quad \left(\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}+\frac{\nu}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}-\frac{\nu}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{L}-\frac{\mu}{M}+\frac{\nu}{N}\right)\left(-\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}+\frac{\nu}{N}\right) = \frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{L^2M^2N^2}.$$

Voilà la formule qui exprime la relation entre les trois côtés d'un triangle inscrit à une ellipse et les démi-diamètres parallèles.

7.

Remarques sur les formules précédentes. Conditions pour que quatre points soient sur une circonférence et pour que cinq points soient sur une sphère.

Les déterminants qui se présentent dans les calculs précédents sont ou des déterminants à éléments inégaux ou des déterminants symétriques par rapport à la diagonale, comme les déterminants à droite des formules (3.) et (5.), et dans quelques uns de ceux-ci les éléments de la diagonale, que nous avons désignés par s, s_1, s_2, s_3 s'évanouissent. En examinant les problèmes que nous venons de traiter, on verra que dans tous ceux qui se résolvent à l'aide des déterminants généraux, il existe une analogie entre le triangle et le cercle d'un côté et la pyramide et la sphère de l'autre. Mais toutes les fois qu'une propriété des deux figures planes peut être démontrée par un déterminant de la forme

$$\begin{matrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0, \end{matrix}$$

(et ce sont par malheur les plus précieuses et les plus élégantes), l'analogie et la simplicité des formules cesse pour les solides. La différence tient alors à ce fait analytique que le déterminant du troisième ordre que nous venons d'écrire, est égal à $2abc$, produit rationnel des éléments, tandis que le déterminant du quatrième ordre

$$(33.)\quad \text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c' & b' \\ b & c' & 0 & a' \\ c & b' & a' & 0 \end{Bmatrix} = a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2-2aa'bb'-2aa'cc'-2bb'cc'$$

n'est décomposable qu'à l'aide des facteurs irrationnels.

Pour éclaircir ce que nous venons d'avancer par un nouvel exemple, examinons les conditions pour que quatre points soient dans un cercle et que cinq points soient sur une sphère: question dont je me suis occupé à plusieurs reprises. Pour le cercle on n'a qu'à éliminer α, β et γ entre les quatre équations

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+\alpha x\;+\beta y\;+\gamma &= 0,\\
x_1^2+y_1^2+\alpha x_1+\beta y_1+\gamma &= 0,\\
x_2^2+y_2^2+\alpha x_2+\beta y_2+\gamma &= 0,\\
x_3^2+y_3^2+\alpha x_3+\beta y_3+\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

On sait que le résultat n'est autre que

$$\text{dét.}\begin{Bmatrix} (x^2+y^2) & x & y & 1\\ (x_1^2+y_1^2) & x_1 & y_1 & 1\\ (x_2^2+y_2^2) & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{Bmatrix} = 0,$$

ou bien

$$0 = (x^2+y^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{Bmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{Bmatrix}$$

$$+(x_2^2+y_2^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{Bmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{Bmatrix}.$$

On trouverait par le même calcul pour la sphère.

$$(x^2+y^2+z^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{Bmatrix} - (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{Bmatrix} + \dots$$

$$\dots - (x_4^2+y_4^2+z_4^2)\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{Bmatrix} = 0,$$

c'est à dire:

a, b, c, d étant quatre points d'un cercle et *o* un point quelconque, on aura

$$(34.)\qquad \Sigma \pm oa^2.\ \text{triangle}\ bcd = 0,$$

et de même pour cinq points d'une sphère *a, b, c, d, e:*

$$(35.)\qquad \Sigma \pm oa^2.\ \text{pyramide}\ bcde = 0.$$

Ces deux théorèmes pour le cercle et pour la sphère ont été signalés par Mr. *Luchterhandt* (Vol. 23ᵉ de ce Journal). Il et presque inutile de remarquer que dans les deux sommes, dont l'une a quatre termes et l'autre cinq, les signes doivent être pris convenablement. Leur analogie tient à ce qu'ils sont tirés des déterminants généraux.

Mais quelque élégante que soit la relation (34.), on sait elle est fort loin d'être la condition la plus simple pour quatre points d'un cercle. Pour en obtenir une autre, il faut recourir aux résultats du No. 4. tirés des déterminants d'une forme particulière. On a pour le rayon du cercle qui passe par a, b, c:

$$r = \frac{ab.ac.bc}{4.\text{triangle}\, abc},$$

et pour un quatrième point d du même cercle:

$$r = \frac{ab.ad.bd}{4.\text{triangle}\, abd},$$

donc

$$(36. \quad \frac{ac.bc}{\text{triangle}\, abc} = \frac{ad.bd}{\text{triangle}\, abd},$$

ce qui entraine la condition

$$\sin acb = \sin adb,$$

ou bien: les deux angles acb, adb sont ou des angles égaux ou des angles supplémentaires. En appliquant le même procédé à la sphère, en faisant usage de la relation (27.), on obtient encore une formule analogue à (36.) mais qui lui est inférieure par rapport à l'élégance. Savoir, pour que les cinq points a, b, c, d, e soient situés sur la même sphère, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{\text{Pyr.}\, abcd}\{(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')(\lambda\lambda'+\mu\mu'-\nu\nu')(\lambda\lambda'-\mu\mu'+\nu\nu')(-\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\text{Pyr.}\, abce}\{(l\lambda'+m\mu'+n\nu')(l\lambda'+m\mu'-n\nu')(l\lambda'-m\mu'+n\nu') \times(-l\lambda'+m\mu'+n\nu')\}^{\frac{1}{2}};$$

où j'ai posé

$$cb = \lambda', \quad ad = \lambda, \quad ae = l,$$
$$ca = \mu', \quad bd = \mu, \quad be = m,$$
$$ab = \mu, \quad cd = \nu, \quad ce = n;$$

mais on n'en pourrait tirer une conséquence remarquable par rapport aux angles de la figure.

Corollaire 1er. En prenant dans la relation (34.) le centre du cercle pour le point o, elle devient identique. Pour remédier à cet inconvénient, on n'a qu'à mettre au lieu des aires des triangles les produits des côtés, ce qui sera permis, les quatre points étant sur la même circonférence; par là on obtient

$$\Sigma \pm oa^2 . bc . cd . bd = 0,$$

ou bien

$$\Sigma \pm \frac{oa^2}{ab . ac . ad} = 0.$$

Pour fixer le choix des signes, supposons que a et c, b et d soient les sommets opposés du quadrilatère convexe; alors on aura

$$(37.) \quad \frac{1}{ac}\left\{\frac{oa^2}{ab.ad} + \frac{oc^2}{cb.cd}\right\} = \frac{1}{bu}\left\{\frac{ob^2}{ba.bc} + \frac{od^2}{da.dc}\right\}.$$

Cette formule n'est pas sans interêt pour la théorie du cercle. Elle donne p. ex. le rapport des diagonales ac et bd, en prenant pour o le centre. Si le point o coïncide avec un des sommets, la formule n'est autre que celle qui exprime le théorème de *Ptolemée.*

8.

Les angles dièdres de la pyramide.

Soient A, B, C, D les quatre faces d'une pyramide triangulaire, et désignons les angles dièdres de la pyramide

entre B et C par l, entre D et A par l',
- - C - A - m, - - D - B - m',
- - A - B - n, - - D - C - n',

et par λ, μ, ν, λ', μ', ν' les arètes correspondantes. Par la théorie des projections orthogonales on a les formules connues

$$(38.) \quad \begin{cases} -A + B\cos n + C\cos m + D\cos l' = 0, \\ A\cos n - B + C\cos l + D\cos m' = 0, \\ A\cos m + B\cos l - C + D\cos n' = 0, \\ A\cos l' + B\cos m' + C\cos n' - D = 0. \end{cases}$$

Le resultat de l'élimination de A, B, C, D donne

$$(38^*.) \quad \text{dét.}\begin{pmatrix} -1 & \cos n & \cos m & \cos l' \\ \cos n & -1 & \cos l, & \cos m' \\ \cos m & \cos l & -1 & \cos n' \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

On pourrait évaluer très-aisément la valeur de ce déterminant à l'aide de la formule (5 bis) et on parviendrait à une formule connue dévéloppée par plusieurs Géomètres dont je ne nomme ici que l'auteur de la Géométrie de position. La formule analogue pour le triangle

$$0 = \text{dét.}\begin{Bmatrix} -1 & \cos n & \cos m \\ \cos n & -1 & \cos l \\ \cos m & \cos l & -1 \end{Bmatrix} = -1 + \cos n^2 + \cos m^2 + \cos l^2 + 2\cos n \cos m \cos l$$

indique que la somme des angles vaut deux droits. Mais quoiqu'il n'existe pas de relation pareille pour les angles dièdres, toutes les formules entre trois angles dont la somme vaut deux droits, comporterons des semblables pour les angles dièdres d'une pyramide. Je vais en développer quelques unes.

Posons

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - \cos l^2 - \cos m'^2 - \cos n'^2 - 2\cos l \cos m' \cos n', \\
\beta &= 1 - \cos l'^2 - \cos m^2 - \cos n'^2 - 2\cos l' \cos m \cos n', \\
\gamma &= 1 - \cos l'^2 - \cos m'^2 - \cos n^2 - 2\cos l' \cos m' \cos n, \\
\delta &= 1 - \cos l^2 - \cos m^2 - \cos n^2 - 2\cos l \cos m \cos n,
\end{aligned}$$

où α, β, γ, δ peuvent être transformés aisément en produits.

On obtient suivant (17.)

$$P^2 = \tfrac{1}{6} ABC\sqrt{\delta} = \tfrac{1}{6} ABD\sqrt{\gamma} = \tfrac{1}{6} ACD\sqrt{\beta} = \tfrac{1}{6} BCD\sqrt{\alpha},$$

donc

$$(39.) \qquad \frac{A}{\sqrt{\alpha}} = \frac{B}{\sqrt{\beta}} = \frac{C}{\sqrt{\gamma}} = \frac{D}{\sqrt{\delta}},$$

et en ayant égard aux relations (38.):

$$(40.) \qquad \begin{cases}
\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}\cos n + \sqrt{\gamma}\cos m + \sqrt{\delta}\cos l', \\
\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha}\cos n + \sqrt{\gamma}\cos l + \sqrt{\delta}\cos m', \\
\sqrt{\gamma} = \sqrt{\alpha}\cos m + \sqrt{\beta}\cos l + \sqrt{\delta}\cos n', \\
\sqrt{\delta} = \sqrt{\alpha}\cos l' + \sqrt{\beta}\cos m' + \sqrt{\gamma}\cos n'.
\end{cases}$$

Ces formules ne sont que des transformations de la relation (38); elles sont analogues à la formule $\sin l = \sin(m+n)$, ou bien

$$\sqrt{(1-\cos l^2)} = \cos n \sqrt{(1-\cos m^2)} + \cos m \sqrt{(1-\cos n^2)}$$

pour le triangle plan.

Remarque. La formule (39.) exprime une généralisation du théorème pour le rapport des côtés d'un triangle plan; il y en a encore une autre qui n'a pas échappé aux Géométres, j'en suis sûr, mais que je ne me rappelle

pas d'avoir trouvée quelque part. On a d'après un théorème connu

$$P = \tfrac{1}{3} BC \frac{\sin l}{\lambda} = \tfrac{1}{3} AD \frac{\sin l'}{\lambda'},$$

donc

$$(41.)\quad P^2 = \tfrac{1}{9} ABCD \frac{\sin l \sin l'}{\lambda.\lambda'},$$

d'où l'on tire

$$(42.)\quad \frac{\lambda\lambda'}{\sin l \sin l'} = \frac{\mu\mu'}{\sin m \sin m'} = \frac{\nu\nu'}{\sin n \sin n'},$$

c'est à dire:

Les produits des arètes opposées sont entre eux comme les produits des sinus des angles dièdres opposés.

On parvient à d'autres théorèmes par le procédé suivant. De l'origine des coordonnées rectangulaires que je suppose dans l'intérieur de la pyramide, abaissons des perpendiculaires sur les faces A, B, C, D, et soient

$$\alpha', \alpha'', \alpha'''; \quad \beta', \beta'', \beta'''; \quad \gamma', \gamma'', \gamma'''; \quad \delta', \delta'', \delta''';$$

les cosinus des angles entre les axes positifs et les perpendiculaires. Mettons

$$(43.)\quad N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} A\alpha' & A\alpha'' & A\alpha''' & A\sqrt{-1} \\ B\beta' & B\beta'' & B\beta''' & B\sqrt{-1} \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' & C\sqrt{-1} \\ D\delta' & D\delta'' & D\delta''' & D\sqrt{-1} \end{Bmatrix}$$

$$= A\sqrt{-1}\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} B\beta' & B\beta'' & B\beta''' \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' \\ D\delta' & D\delta'' & D\delta''' \end{Bmatrix} - B\sqrt{-1}\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} A\alpha' & A\alpha'' & A\alpha''' \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' \\ D\delta' & D\delta'' & D\delta''' \end{Bmatrix} + \dots$$

où à l'aide des formules (14., 15., 16.)

$$(44.)\quad \pm N = \tfrac{1}{3}(A+B+C+D)P^2\sqrt{-1}\,{}^{*)}.$$

En élévant au carré, on obtient un déterminant dont je ne vais écrire que la première ligne

$$A^2(\alpha'^2+\alpha''^2+\alpha'''^2-1), \quad AB(\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\alpha'''\beta'''-1),$$
$$AC(\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma'''-1), \quad AD(\alpha'\delta'+\alpha''\delta''+\alpha'''\delta'''-1).$$

Mais

$$\alpha'^2+\alpha''^2+\alpha'''^2-1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\alpha'''\beta''' = -\cos n,$$
$$\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma''' = -\cos m \text{ etc.},$$

donc

*) J'ai supprimé, pour abréger, la discussion bien facile relative aux signes $\pm$.

$$(45.)\quad \text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & -AB(1+\cos n) & -AC(1+\cos m) & -AD(1+\cos l') \\ -AB(1+\cos n) & 0 & -BC(1+\cos l) & -BD(1+\cos m') \\ -AC(1+\cos m) & -BC(1+\cos l) & 0 & -CD(1+\cos n') \\ -AD(1+\cos l') & -BD(1+\cos m') & -CD(1+\cos n') & 0 \end{Bmatrix} = N^2.$$

En mettant $2\cos\frac{1}{2}n^2$ au lieu des expressions $(1+\cos n)$ etc., et en calculant le déterminant suivant la formule (33.). on obtient

$$N^2 = -16A^2B^2C^2D^2U, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} U = & (\cos\tfrac{1}{2}l\cos\tfrac{1}{2}l' + \cos\tfrac{1}{2}m\cos\tfrac{1}{2}m' + \cos\tfrac{1}{2}n\cos\tfrac{1}{2}n') \\ & \times (\cos\tfrac{1}{2}l\cos\tfrac{1}{2}l' + \cos\tfrac{1}{2}m\cos\tfrac{1}{2}m' - \cos\tfrac{1}{2}n\cos\tfrac{1}{2}n') \\ & \times (\cos\tfrac{1}{2}l\cos\tfrac{1}{2}l' - \cos\tfrac{1}{2}m\cos\tfrac{1}{2}m' + \cos\tfrac{1}{2}n\cos\tfrac{1}{2}n') \\ & \times (-\cos\tfrac{1}{2}l\cos\tfrac{1}{2}l' + \cos\tfrac{1}{2}m\cos\tfrac{1}{2}m' + \cos\tfrac{1}{2}n\cos\tfrac{1}{2}n'). \end{aligned}$$

Il suit de là

$$\{\tfrac{2}{3}(A+B+C+D)P\sqrt{-1}\}^2 = -16A^2B^2C^2D^2U,$$

donc

$$(46.)\qquad P^2 = \tfrac{8}{3}\frac{ABCD}{A+B+C+D}\sqrt{U}.$$

Mais on a suivant (17.)

$$AP^2 = \tfrac{2}{3}ABCD\sqrt{\alpha},$$

et des expressions analogues pour BP^2, CP^2, DP^2; donc en prenant la somme et divisant par (46.),

$$(47.)\qquad 4\sqrt{U} = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}.$$

Voilà une nouvelle équation entre les six angles dièdres d'une pyramide, analogue à la relation entre les trois angles d'un triangle

$$\sin l + \sin m + \sin n = 4\cos\tfrac{1}{2}l\cos\tfrac{1}{2}m\cos\tfrac{1}{2}n.$$

En transposant l'origine de laquelle on a abaissé les perpendiculaires sur les faces dans un autre des espaces limités par les plans des faces prolongés indéfiniment, on obtiendrait d'autres formules semblables aux précédentes.

Corollaire. En appliquant la même marche du calcul au triangle, la formule (45.) devient

$$\begin{aligned} N = & \{2(a+b+c)A\sqrt{-1}\}^2 \\ = & \text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & -ab(1+\cos n) & -ac(1+\cos m) \\ -ab(1+\cos n) & 0 & -bc(1+\cos l) \\ -ac(1+\cos m) & -bc(1+\cos l) & 0 \end{Bmatrix} \\ = & \text{dét.}\begin{Bmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}((a+b)^2-c^2) & -\tfrac{1}{2}((a+c)^2-b^2) \\ -\tfrac{1}{2}((a+b)^2-c^2) & 0 & -\tfrac{1}{2}((b+c)^2-a^2) \\ -\tfrac{1}{2}((a+c)^2-b^2) & -\tfrac{1}{2}((b+c)^2-a^2) & 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

ou bien

$$A^2 = \frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{(c+a)^2-b^2\}\{(a+b)^2-c^2\}}{16(a+b+c)^2},$$

A étant l'aire et a, b, c les côtés du triangle. En effaçant dans le dénominateur les facteurs du numérateur, on obtient la formule connue de l'aire, exprimée par les côtés.

9.

Formules diverses relatives à la pyramide triangulaire.

Les formules précédentes fournissent un moyen bien simple d'exprimer les arêtes, les faces et le volume de la pyramide par le rayon de la sphère circonscrite et par les angles dièdres. J'ajouterai encore ces relations si ce n'est que pour inviter d'en chercher de plus élégantes.

En rapprochant les formules (27.) et (41.), il vient

$$r = \tfrac{16}{81}\frac{A^2.B^2.C^2.D^2}{24P^5}\sqrt{V},$$

où

$$\begin{aligned}(48.)\qquad V = &\ (\sin l\sin l'+\sin m\sin m'+\sin n\sin n')\\ \times &\ (\sin l\sin l'+\sin m\sin m'-\sin n\sin n')\\ \times &\ (\sin l\sin l'-\sin m\sin m'+\sin n\sin n')\\ \times &(-\sin l\sin l'+\sin m\sin m'+\sin n\sin n').\end{aligned}$$

Mais on peut mettre $A^2P^4 = \frac{4}{81}A^2B^2C^2D^2\alpha$ (17.); par conséquent

$$(49.)\qquad 6Pr = \frac{A^2}{\alpha}\sqrt{V} = \frac{B^2}{\beta}\sqrt{V} = \frac{C^2}{\gamma}\sqrt{V} = \frac{D^2}{\delta}\sqrt{V}.$$

Il suit de là

$$216P^3r^3 = \frac{A^2B^2C^2V^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta\gamma}.$$

Mais suivant (17.)

$$P^4 = \tfrac{4}{81}A^2B^2C^2\delta,$$

donc

$$(50.)\qquad P = \tfrac{32}{3}\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{V^{\frac{3}{2}}}r^3.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (49.) elles deviennent

$$(51.)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\alpha}, & C = \dfrac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\gamma}, \\ B = \dfrac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\beta}, & D = \dfrac{8\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{V}r^2\sqrt{\delta}. \end{cases}$$

D'après une formule dont nous avons déjà fait usage, on a

$$P = \tfrac{1}{2} BC \frac{\sin l}{\lambda} = \tfrac{1}{2} AD \frac{\sin l'}{\lambda'},$$

donc

$$(52.)\quad \begin{cases} \lambda = 4r\sqrt{\left(\frac{\beta\gamma}{V}\right)} \sin l, & \lambda' = 4r\sqrt{\left(\frac{\alpha\delta}{V}\right)} \sin l', \\ \mu = 4r\sqrt{\left(\frac{\alpha\gamma}{V}\right)} \sin m, & \mu' = 4r\sqrt{\left(\frac{\beta\delta}{V}\right)} \sin m', \\ \nu = 4r\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta}{V}\right)} \sin n, & \nu' = 4r\sqrt{\left(\frac{\gamma\delta}{V}\right)} \sin n'. \end{cases}$$

Quant aux angles formés par deux arètes opposées, ils sont donnés par une formule tirée d'un théorème relatif aux déterminants, mais différent de celui de la multiplication. Cette formule que donne le théorème de la multiplication, comme je le ferai voir ci-après, est:

$$(53.)\quad \begin{cases} \quad (\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \alpha'''\beta''')(\gamma'\delta' + \gamma''\delta'' + \gamma'''\delta''') \\ -(\alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \alpha'''\gamma''')(\beta'\delta' + \beta''\delta'' + \beta'''\delta''') \\ = (\alpha''\gamma''' - \alpha'''\gamma'')(\beta''\delta''' - \beta'''\delta'') \\ \; + (\alpha'''\gamma' - \alpha'\gamma''')(\beta'''\delta' - \beta'\delta''') \\ \; + (\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma')(\beta'\delta'' - \beta''\delta'). \end{cases}$$

En admettant les désignations du No. précédent, on trouvera que les quantités $\alpha''\gamma''' - \alpha'''\gamma''$, $\alpha'''\gamma' - \alpha'\gamma'''$, $\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'$ sont proportionnelles aux cosinus d'une ligne perpendiculaire à celles-ci

$$x:y:z = \alpha':\alpha'':\alpha''',$$
$$x:y:z = \gamma':\gamma'':\gamma''',$$

qui représentent des perpendiculaires sur les faces A et C de la pyramide; donc $\alpha''\gamma''' - \gamma''\alpha'''$ etc. seront proportionnelles aux cosinus des angles entre l'arète μ, ligne d'intersection des deux faces A et C, et les axes. On trouve par les méthodes connues

$$\cos(\mu, x) = \frac{\alpha''\gamma''' - \alpha'''\gamma''}{\sqrt{((\alpha''\gamma''' - \gamma''\alpha''')^2 + (\alpha'''\gamma' - \gamma'''\alpha')^2 + (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'')^2)}}$$

$$= \frac{\alpha''\gamma''' - \alpha'''\gamma''}{\sqrt{((\alpha'^2 + \alpha''^2 + \alpha'''^2)(\gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma'''^2) - (\alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \alpha'''\gamma''')^2)}} = \frac{\alpha''\gamma''' - \gamma''\alpha'''}{\sqrt{(1 - \cos m^2)}},$$

donc

$$\alpha''\gamma'''-\gamma''\alpha''' = \pm\sin m\cos(\mu,x), \qquad \beta''\delta'''-\beta'''\delta'' = \sin m'\cos(\mu',x),$$
$$\alpha'''\gamma'-\alpha'\gamma''' = \pm\sin m\cos(\mu,y), \qquad \beta'''\delta'-\beta'\delta''' = \sin m'\cos(\mu',y),$$
$$\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma' = \pm\sin m\cos(\mu,z), \qquad \beta'\delta''-\beta''\delta' = \sin m'\cos(\mu',z).$$

En substituant ces valeurs, on tire de l'équation (53.)

$$(54.)\qquad \cos n\cos n'-\cos l\cos l' = \sin m\sin m'\cos(\mu,\mu')$$

donc

$$\cos(\mu,\mu') = \frac{\cos n\cos n'-\cos l\cos l'}{\cos m\cos m'}.$$

On trouve par un changement des lettres $\cos(\lambda,\lambda')$, $\cos(\nu,\nu')$, et en additionnant ces formules on obtient

$$(55.)\qquad \sin l\sin l'\cos(\lambda,\lambda')+\sin m\sin m'\cos(\mu,\mu')+\sin n\sin n'\cos(\nu,\nu') = 0.$$

Une formule semblable, savoir

$$(56.)\qquad \lambda\lambda'\cos(\lambda,\lambda')+\mu\mu'\cos(\mu,\mu')+\nu\nu'\cos(\nu,\nu') = 0$$

a été donnée par *Carnot* (Mém. sur la relation qui existe entre les distances de 5 points). Mais comme les produits des sinus $\sin l\sin l'$ sont proportionnels à ceux des arêtes, chacune d'elles entraine l'autre. La relation polaire de (54.), savoir la formule entre les six distances de quatre points d'une sphère et l'angle formé par les prolongements des côtés opposés ou par les diagonales, est due à Mr. *Gaufs* (voir „Considerationes generales circa superficies curvas §. 2. Form. VI."). J'ai lieu de croire que la marche pour parvenir à la formule (54.) est la même que celle suivie par cet illustre Géométre.

Pour exprimer les plus courtes distances des arètes opposées, il n'y a qu'à prendre pour point de départ la formule connue

$$\tfrac{1}{6}\lambda\lambda' f\sin(\lambda,\lambda') = P,$$

f étant la plus courte distance entre λ et λ'.

Corollaire 1er. Soient f, g, h les plus courtes distances des arêtes opposées, et a, b, c, d les quatre hauteurs d'une pyramide, on démontrera très-aisément la relation

$$(57.)\qquad \frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}.$$

Corollaire 2e. Je profiterai de cette occasion pour faire voir que (53.), et même la formule générale, dont (53.) n'est qu'un cas particulier, peut être tirée du théorème de la multiplication.

Metlons

$$D = \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & y & z & \dots & t \\ x' & y' & z' & \dots & t' \\ x'' & y'' & z'' & \dots & t'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(n)} & y^{(n)} & z^{(n)} & \dots & t^{(n)} \end{Bmatrix}, \qquad \Delta = \text{dét.}\begin{Bmatrix} \xi & \eta & \zeta & \dots & \tau \\ \xi' & \eta' & \zeta' & \dots & \tau' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & \dots & \tau'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{(n)} & \eta^{(n)} & \zeta^{(n)} & \dots & \tau^{(n)} \end{Bmatrix},$$

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & l_{0,2} & \dots & l_{0,n} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,n} \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n,0} & l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n} \end{Bmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}
l_{0,0} &= x\xi + y\eta + z\zeta + \dots + t\tau, \\
l_{0,1} &= x\xi' + y\eta' + z\zeta' + \dots + t\tau', \\
l_{0,2} &= x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' + \dots + t\tau'', \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
l_{0,n} &= x\zeta^{(n)} + y\eta^{(n)} + x\zeta^{(n)} + \dots + t\tau^{(n)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
l_{n,0} &= x^{(n)}\xi + y^{(n)}\eta + z^{(n)}\zeta + \dots + t^{(n)}\tau, \\
l_{n,1} &= x^{(n)}\xi' + y^{(n)}\eta' + z^{(n)}\zeta' - \dots + t^{(n)}\tau', \\
l_{n,2} &= x^{n}\xi'' + y^{n}\eta'' + z^{(n)}\zeta'' + \dots + t^{(n)}\tau'', \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
l_{n,n} &= x^{n}\xi^{(n)} + y^{(n)}\eta^{(n)} + z^{(n)}\zeta^{(n)} + \dots + t^{(n)}\tau^{(n)},
\end{aligned}$$

on aura

$$(58.) \qquad D\Delta = N.$$

Différentions par rapport aux quantités x_n, y_n, z_n, ... t_n contenues dans D, $l_{n,0}$, $l_{n,1}$, ... $l_{n,n}$. il vient

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{\partial D}{\partial x^{(n)}} &= \xi\frac{\partial N}{\partial l_{n,0}} + \xi'\frac{\partial N}{\partial l_{n,1}} + \dots + \xi^{(n)}\frac{\partial N}{\partial l_{n,n}}, \\
\Delta\frac{\partial D}{\partial y^{(n)}} &= \eta\frac{\partial N}{\partial l_{n,0}} + \eta'\frac{\partial N}{\partial l_{n,1}} + \dots + \eta^{(n)}\frac{\partial N}{\partial l_{n,n}}, \\
\Delta\frac{\partial D}{\partial z^{(n)}} &= \zeta\frac{\partial N}{\partial l_{n,0}} + \zeta'\frac{\partial N}{\partial l_{n,1}} + \dots + \zeta^{(n)}\frac{\partial N}{\partial l_{n,n}}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta\frac{\partial D}{\partial t^{(n)}} &= \tau\frac{\partial N}{\partial l_{n,0}} + \tau'\frac{\partial N}{\partial l_{n,1}} + \dots + \tau^{(n)}\frac{\partial N}{\partial l_{n,n}}.
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations par $\frac{\partial \Delta}{\partial \xi^{(n)}}, \frac{\partial \Delta}{\partial \eta^{(n)}}, \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta^{(n)}}, \ldots \frac{\partial \Delta}{\partial \tau^{(n)}}$ et ajoutons-les, en ayant égard aux relations connues

$$\begin{array}{l}
\xi \frac{\partial \Delta}{\partial \xi^{(n)}} + \eta \frac{\partial \Delta}{\partial \eta^{(n)}} + \ldots + \tau \frac{\partial \Delta}{\partial \tau^{(n)}} = 0, \\
\xi' \frac{\partial \Delta}{\partial \xi^{(n)}} + \eta' \frac{\partial \Delta}{\partial \eta^{(n)}} + \ldots + \tau' \frac{\partial \Delta}{\partial \tau^{(n)}} = 0, \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\xi^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi^{(n)}} + \eta^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial \eta^{(n)}} + \ldots + \tau^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial \tau^{(n)}} = \Delta,
\end{array}$$

il viendra

$$(59.) \quad \frac{\partial D}{\partial x^{(n)}} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi^{(n)}} + \frac{\partial D}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial \Delta}{\partial \eta^{(n)}} + \ldots + \frac{\partial D}{\partial t^{(n)}} \frac{\partial \Delta}{\partial \tau^{(n)}} = \frac{\partial N}{\partial l_{n,n}}$$

ou bien

$$\text{dét.}\begin{Bmatrix} y & z & \ldots & t \\ y' & z' & \ldots & t' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)} & z^{(n-1)} & \ldots & t^{(n-1)} \end{Bmatrix} . \text{dét.}\begin{Bmatrix} \eta & \zeta & \ldots & \tau \\ \eta' & \zeta' & \ldots & \tau' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta^{(n-1)} & \zeta^{(n-1)} & \ldots & \tau^{(n-1)} \end{Bmatrix}$$

$$+ \text{dét.}\begin{Bmatrix} x & z & \ldots & t \\ x' & z' & \ldots & t' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(n-1)} & z^{(n-1)} & \ldots & t^{(n-1)} \end{Bmatrix} . \text{dét.}\begin{Bmatrix} \xi & \zeta & \ldots & \tau \\ \xi' & \zeta' & \ldots & \tau' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^{(n-1)} & \zeta^{(n-1)} & \ldots & \tau^{(n-1)} \end{Bmatrix} + \ldots$$

$$= \text{dét.}\begin{Bmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & \ldots & l_{0,n-1} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & \ldots & l_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n-1,0} & l_{n-1,1} & \ldots & l_{n-1,n-1} \end{Bmatrix}.$$

En différentiant de nouveau par rapport à $x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$, etc. on obtiendra d'autres formules; et ainsi de suite.

Toutes ces formules sont susceptibles d'applications nombreuses et variées à la Géométrie; mais je supprime ces applications, de peur, d'avoir déjà trop étendu ce mémoire.

Berlin. Novembre 1849.

3

Note relative à un théorème de Mr. Malmstèn sur les équations différentielles linéaires.

(Par Mr. *F. Joachimsthal* de Berlin.) *)

Le théorème de Mr. *Malmstèn* relatif aux équations différentielles linéaires sans second terme s'applique aussi à des équations plus générales.

D'Alembert a démontré que l'équation différentielle linéaire

$$(1.)\quad y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots+Ry''+Sy'+Ty = U$$

se réduit à une autre du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre en supposant connue une intégrale particulière u de l'équation sans second terme

$$(2.)\quad y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots+Ry''+Sy'+Ty = 0.$$

Pour effectuer cette réduction il faut mettre $y = u\int Ydx$. Supposons que deux intégrales u et v soient données, on fera

$$y = u\int vYdx - v\int uYdx;$$

pour trois intégrales u, v, w on fera

$$y = u\int(vw'-wv')Ydx + v\int(wu'-uw')Ydx + w\int(uv'-vu')Ydx,$$

et ainsi de suite.

En effet, on aura dans le cas de trois intégrales particulières

$$y' = u'\int(vw'-wv')Ydx + v'\int(wu'-uw')Ydx + w'\int(uv'-vu')Ydx,$$

$$y'' = u''\int(vw'-wv')Ydx + v''\int(wu'-uw')Ydx + w''\int(uv'-vu')Ydx,$$

$$y''' = u'''\int(vw'-wv')Ydx + v'''\int(wu'-uw')Ydx + w'''\int(uv'-vu')Ydx + \Delta Y,$$

où

$$\Delta = u''(vw'-wv') + v''(wu'-uw') + w''(uv'-vu').$$

On voit par là que le plus haut coefficient différentiel de Y contenu dans $y^{(n)}$ sera $Y^{(n-3)}$; et en substituant les valeurs de y, y', y'', ... $y^{(n)}$ dans (1.), les trois intégrales

$$\int(vw'-wv')Ydx,\quad \int(wu'-uw')Ydx,\quad \int(uv'-vu')Ydx$$

disparaîtront; car u, v, w étant des intégrales particulières de (2.), on aura évidemment

$$u^{(n)}+Pu^{(n-1)}+Qu^{(n-2)}+\ldots Ru''+Su'+Tu = 0 \text{ etc.}$$

Généralement soient u, v, w, ... t, m intégrales particulières et indépendantes

---

*) Cf. Vol. 39. pag. 108.

de l'équation (2.) (où $m \leqq n$), et $\varDelta$ le déterminant des m^2 quantités

$$\begin{matrix} u & v & w & \dots t, \\ u' & v' & w' & \dots t', \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(m-1)} & v^{(m-1)} & w^{(m-1)} & \dots t^{(m-1)}, \end{matrix}$$

il faudra mettre

$$y = u\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(m-1)}} Y dx + v\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(m-1)}} Y dx + \dots + t\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(m-1)}} Y dx$$

pour réduire l'équation (1.) à une autre du $(n-m)^{\text{ième}}$ ordre.

Examinons encore les cas $m = n-2$, $n-1$, n.

Pour $m = n-2$, nous supposons

$$y = u\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(n-3)}} Y dx,$$

$$y' = u'\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v'\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t'\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(n-3)}} Y dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-3)} = u^{(n-3)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v^{(n-3)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t^{(n-3)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(n-3)}} Y dx,$$

$$y^{(n-2)} = u^{(n-2)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v^{(n-2)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t^{(n-2)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(n-2)}} Y dx + \varDelta Y,$$

$$y^{(n-1)} = u^{(n-1)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v^{(n-1)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t^{(n-1)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(n-1)}} Y dx$$
$$+ (\varDelta Y)' + \left\{ u^{(n-2)} \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} + v^{(n-2)} \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} + \dots \right\} Y,$$

ou bien, en mettant

$$u^{(n-2)} \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} + v^{(n-2)} \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} + \dots = \varDelta_1,$$

$$u^{(n-1)} \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-1)}} + v^{(n-1)} \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} + \dots = \varDelta_2:$$

$$y^{(n-1)} = u^{(n-1)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v^{(n-1)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t^{(n-1)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial t^{(n-3)}} Y dx$$
$$+ (\varDelta Y)' + \varDelta_1 Y \quad \text{et}$$

$$y^{(n)} = u^{(n)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial u^{(n-3)}} Y dx + v^{(n)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx + \dots + t^{(n)}\int \frac{\partial \varDelta}{\partial v^{(n-3)}} Y dx$$
$$+ (\varDelta Y)'' + (\varDelta_1 Y)' + \varDelta_2 Y.$$

En substituant ces valeurs, l'équation (1.) ce transforme en celle-ci

$$(3.) \quad (\varDelta Y)'' + (\varDelta_1 Y)' + (\varDelta_2 Y) + P\{(\varDelta Y)' + \varDelta_1 Y\} + Q\varDelta Y = U.$$

Cette équation du second ordre n'admet pas une intégration générale, je ne l'ai proposée que pour faire voir la forme générale de l'équation réduite.

Pour $m = n-1$, on trouve également

$$(4.) \quad (\varDelta Y)' + \varDelta_1 Y + P\varDelta Y = U.$$

Voilà une équation du premier ordre qui peut être intégrée par les méthodes connues; Δ étant le déterminant des $(n-1)^2$ quantités

$$\begin{matrix} u & v & w & \dots \\ u' & v' & w' & \dots \\ u'' & v'' & w'' & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n-2)} & v^{(n-2)} & w^{(n-2)} & \dots, \end{matrix}$$

et $\Delta_1 = u^{(n-1)} \frac{\partial \Delta}{\partial u^{(n-2)}} + v^{(n-1)} \frac{\partial \Delta}{\partial v^{(n-1)}} + \dots$

Mais en vertu des propriétés des déterminants on a

$$(4 \text{ bis}) \qquad \Delta_1 = \frac{d\Delta}{dx} = \Delta',$$

donc (4.) se transforme en

$$(5.) \qquad \Delta Y' + 2\Delta' Y + P\Delta Y = U, \text{ ou bien } (\Delta^2 Y)' + P\Delta^2 Y = \Delta U, \text{ donc}$$

$$Y = \frac{1}{\Delta^2} e^{-\int P dx} \int \Delta U e^{\int P dx},$$

et l'intégrale complète de (1.) devient

$$(6.) \qquad y = u \int \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial u^{(n-2)}} \frac{e^{-\int P dx}}{\Delta^2} \int \Delta U e^{\int P dx} dx \right\} dx$$
$$+ v \int \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial v^{(n-2)}} \frac{e^{-\int P dx}}{\Delta^2} \int \Delta U e^{\int P dx} dx \right\} dx + \dots$$

Cette somme à $(n-1)$ termes embrasse $(n+1)$ intégrales qui renferment $(n+1)$ constantes arbitraires. Les deux constantes du produit des intégrales

$$e^{-\int P dx} \int \Delta u e^{\int P dx} dx$$

se réunissent en une seule; donc il n'existe que n constantes arbitraires.

Pour $U = 0$, la valeur de Y tirée de (5.), devient $\frac{e^{-\int P dx}}{\Delta^2}$, et

$$(7.) \qquad y = u \int \frac{\partial \Delta}{\partial u^{(n-2)}} \frac{e^{-\int P dx}}{\Delta^2} dx + v \int \frac{\partial \Delta}{\partial v^{(n-2)}} \frac{e^{-\int P dx}}{\Delta^2} dx + \dots$$

Cette formule qui renferme n constantes arbitraires, s'accorde avec le théorème de Mr. ***Malmstèn***.

Pour $m = n$ on obtient

$$(8.) \qquad y = u \int \frac{\partial \Delta}{\partial u^{(n-1)}} \frac{U}{\Delta} + v \int \frac{\partial \Delta}{\partial v^{(n-1)}} \frac{U}{\Delta} + \dots \qquad \Delta = \text{dét.} \begin{Bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n-1)} & v^{(n-1)} & w^{(n-1)} \end{Bmatrix}.$$

J'ai communiqué quelques unes des formules précédentes à Mr. ***Liouville*** ce Février dernier, tout en supposant qu'elles ne fûssent pas inconnues des Géomètres qui s'occupent de la théorie des déterminants.

Berlin. Décbr. 1849.

4.
Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.

(Von *G. Kirchhoff,* Privatdocent an der Universität zu Berlin.)

Der erste Versuch einer Theorie der Transversalschwingungen elastischer Scheiben ist von *Sophie Germain* bekannt gemacht. Im Jahre 1811 reichte sie der Pariser Akademie, die einen Preis für eine solche Theorie ausgesetzt hatte, eine Abhandlung ein, in welcher eine Hypothese über die Kräfte auseinandergesetzt war, mit denen eine Scheibe Formveränderungen widerstrebt, und aus dieser Hypothese war eine partielle Differentialgleichung für die Schwingungen abgeleitet. Die Verfasserin hatte bei der Rechnung einen Fehler gemacht; *Lagrange*, der sich in der zur Begutachtung der Abhandlung niedergesetzten Commission befand, leitete aus ihrer Hypothese die Differentialgleichung ab, welche eine richtige Rechnung geben mufste. Es ist dieses dieselbe, welche noch jetzt als die richtige anerkannt wird. Noch fehlten aber die Grenzbedingungen, durch welche die Lösung der partiellen Differentialgleichung erst zu einer bestimmten wird. Diese hat *Sophie Germain* in einer zweiten Abhandlung, die sie 2 Jahre später der Akademie übergab, aus derselben Hypothese abgeleitet. Sie waren von der Art, dafs die Verfasserin die Lösung des Problems für den Fall rechteckiger Scheiben ermitteln konnte. Sie verglich ihre theoretischen Resultate für diesen Fall mit Beobachtungen und fand eine Übereinstimmung, die ihre Hypothese zu bestätigen schien. In einer dritten Abhandlung, die sie 1815 der Akademie überreichte, erweiterte sie ihre Hypothese so, dafs sich aus derselben auch die Theorie der Schwingungen von Platten ableiten liefs, die im natürlichen Zustande gekrümmt sind. Sie konnte die Rechnung für cylinderförmig gekrümmte Platten durchführen und fand auch hier ihre theoretischen Resultate im Einklang mit experimentellen.

Diese 3 Abhandlungen sind nicht gedruckt; den Hauptinhalt derselben und die Ergebnisse ihrer fortgesetzten Forschungen hat die Verfasserin in zwei Schriften veröffentlicht, von denen die erste „Recherches sur la théorie des surfaces élastiques" im Jahre 1821, die zweite „Remarques sur la nature,

les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et l'équation générale de ces surfaces" im Jahre 1826 zu Paris erschienen sind.

Ungeachtet der Bestätigungen, welche die Theorie von *Sophie Germain* durch Versuche erfahren hat, ist sie nicht richtig; denn man kann Folgerungen aus ihr ziehen, welche in offenbarem Widerspruche mit der Wirklichkeit stehen. Ich beschränke mich, um dieses zu zeigen, auf die Betrachtung einer Platte, die im natürlichen Zustande eben ist. Die Schlüsse, durch deren Hülfe *Sophie Germain* zu ihren Gesetzen für die Formveränderung, die eine solche Platte durch die Wirkung äufserer Kräfte erleidet, und für die Schwingungen, die sie vollführt, gelangt, sind im Wesentlichen folgende.

In jedem Elemente der Platte, welches seine Gestalt verändert hat, ist eine Kraft erzeugt, welche dasselbe in seine ursprüngliche Form zurückzuführen trachtet. Die Bedingung des Gleichgewichts der Platte ist die, dafs das Moment aller in derselben erzeugten Kräfte und das Moment der gegebenen äufseren Kräfte eine verschwindende Summe liefern. Es sei ε die Dicke der Platte, df ein Element ihrer Mittelfläche; die in dem Elemente εdf erzeugte Kraft wird um so gröfser sein, je gröfser der Unterschied der Gestalt von df nach der Formveränderung und der ursprünglichen Gestalt dieses Elements ist. Hätte man ein passendes Maafs für diesen Unterschied, so würde man jene Kraft diesem proportional annehmen können; es sei u ein solches Maafs, dann wird man jene Kraft

$$= N^2 u\, df$$

setzen können; wo N^2 eine von der Dicke und der Natur der Platte abhängige Constante bezeichnet. Das Streben dieser Kraft geht dahin, u zu verkleinern; das Moment derselben wird daher sein:

$$-N^2 u\, \delta u\, df;$$

wo δu die virtuelle Veränderung von u bedeutet.

Stellt man die entsprechende Betrachtung für den Fall eines elastischen Stabes an, so gelangt man zu den richtigen Endgleichungen, wenn man $u =$ dem reciproken Krümmungsradius der Mittellinie des Stabes setzt; *Sophie Germain* glaubte dem entsprechend in dem Falle einer Scheibe $u =$ der Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche annehmen zu können. Sind diese Hauptkrümmungsradien $= \varrho_1$ und ϱ_2, so erhielt sie demnach für das Moment der in dem einen Elemente erzeugten Kraft den Ausdruck

$$-N^2\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\delta\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)df,$$

und als Bedingung des Gleichgewichts der Platte die Gleichung:

$$\partial P - N^2 \int \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \partial \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) df = 0,$$

falls ∂P das Moment der gegebenen äufsern Kräfte bezeichnet.

Um zu zeigen, dafs diese Bedingung unmöglich die richtige sein kann, wende ich sie auf den Fall an, wo eine Scheibe unendlich wenig aus ihrer ursprünglichen Gestalt gebracht ist, durch Kräfte, die auf ihr Inneres senkrecht zu ihrer Mittelfläche wirken; den Rand der Scheibe nehme ich dabei der Einfachheit wegen als frei an. Die Mittelfläche in ihrer ursprünglichen Gestalt sei die xy Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, z die auf ihr senkrechte Verrückung, welche der Punct (x, y) der Mittelfläche erlitten hat, Z die Kraft, die in der Richtung von z auf eine Linie der Platte wirkt, die in derselben Richtung durch den Punct (x, y) gezogen ist. Setzt man dann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = u,$$

so liefert jene Gleichgewichtsbedingung für u die partielle Differentialgleichung

$$N^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = Z$$

und die Grenzbedingungen

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0;$$

wo n die Normale der Contour der Mittelfläche bezeichnet. Nun ist aber die Lösung der Differentialgleichung für u schon durch die erste der beiden Grenzbedingungen vollkommen bestimmt; es ist daher im Allgemeinen nicht möglich, ein u zu finden, welches auch noch der zweiten Grenzbedingung genügt; und demnach gäbe es im Allgemeinen gar kein Gleichgewicht für die Platte. Wären die gegebenen Kräfte Z von der Art, dafs eine Function u gefunden werden könnte, die den beiden Grenzbedingungen genügt, so hätte man, um die Gestalt der Mittelfläche zu ermitteln, diesen Werth von u in die Differentialgleichung für z zu substituiren und aus derselben z zu bestimmen. Dieser Gleichung genügen aber unendlich viele Functionen; es würde daher in diesem Falle unendlich viele Gleichgewichtslagen der Platte geben. Dieser Fall würde z. B. eintreten, wenn keine Kräfte Z vorhanden sind; wäre die Platte in irgend welche Gestalt gebracht, für die

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ist, und dann sich selbst überlassen, so müfste sie in dieser Gestalt verharren,

ohne das Bestreben zu zeigen, in ihre ursprüngliche Gestalt zurückzukehren. Jener Gleichgewichtsbedingung zufolge müfste die Platte, auch wenn sie endliche Krümmungen erlitten hat, ohne Mitwirkung äufserer Kräfte im Gleichgewichte sich befinden, sobald für alle Puncte ihrer Mittelfläche die Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien verschwindet.

Eine zweite Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Scheiben ist von *Poisson* aufgestellt und in seiner berühmten Abhandlung „Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques" *) entwickelt. Aber auch diese Theorie bedarf einer Berichtigung, und dieselbe zu geben, ist eben meine Absicht. *Poisson* gelangt, indem er seine allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts elastischer Körper auf den Fall einer Scheibe anwendet, zu derselben partiellen Differentialgleichung, zu welcher die Hypothese von *Sophie Germain* geführt hat, aber zu andern Grenzbedingungen, und zwar zu drei Grenzbedingungen. Ich werde beweisen, dafs im Allgemeinen diesen nicht gleichzeitig genügt werden kann; woraus dann folgt, dafs auch nach der *Poisson*schen Theorie eine Platte im Allgemeinen *keine* Gleichgewichtslage haben müfste. Diesen Beweis werde ich aber erst führen, nachdem ich die zwei Grenzbedingungen abgeleitet haben werde, die an die Stelle der *Poisson*schen drei zu setzen sind, weil er sich naturgemäfs an die Betrachtungen anschliefst, durch welche ich jene ableiten will.

Poisson hat seine Theorie auf den Fall einer kreisförmigen Platte angewandt, die so schwingt, dafs alle Puncte, die gleich weit von ihrem Mittelpuncte abstehen, sich immer in demselben Zustande befinden; er konnte sie auf diesen Fall anwenden, weil in demselben eine seiner drei Grenzbedingungen identisch erfüllt wurde. Aus der modificirten Theorie werde ich allgemein die Gesetze der Schwingungen einer freien kreisförmigen Platte entwickeln; in dem bezeichneten speciellen Falle werde ich zu denselben Formeln gelangen, welche *Poisson* gefunden hat. Durch die Güte des Herrn Director *Strehlke*, welcher Messungen in Bezug auf die Knotenlinien kreisförmiger Scheiben angestellt hat, bin ich in den Stand gesetzt, einige der numerischen Resultate der Theorie mit den entsprechenden Resultaten der Beobachtung zusammenzustellen.

§. 1.

Poisson legt seinen Betrachtungen über eine elastische Platte die Gleichungen zu Grunde, welche auf die Formveränderungen beliebig gestalteter

---

*) Mém. de l'Ac. d. sc. à Par. 1829. p. 357.

elastischer Körper sich beziehen. Diese Gleichungen lassen sich in *eine* zusammenfassen, welche ausspricht, dafs das Moment der Kräfte, welche die Formveränderung bewirkt haben, der Variation eines gewissen Integrals gleich ist. Es hat diese vor jenen auch das voraus, dafs jene nur gelten, wenn die Verrückungen unendlich klein sind, während diese besteht, sobald die Dilatationen und Contractionen unendlich klein sind; auf den Fall von unendlich dünnen Stäben oder Platten, die endliche Krümmungen erlitten haben, können jene nicht angewandt werden, diese kann es aber. Sie ist die folgende:

$$(1.)\quad 0 = \delta P - \delta K \int dV(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2).$$

Hier bedeuten δP das Moment der gegebenen Kräfte, dV das Volumen eines Elements des Körpers, λ_1, λ_2, λ_3 die Hauptdilatationen dieses Elements; die Integration ist über den ganzen Körper auszudehnen; K und θ sind zwei Constanten, von denen der Elasticitätscoëfficient q auf die Weise abhängt, dafs

$$q = 2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}$$

ist. Man erhält aus (1.) die *Poisson*schen Gleichungen, wenn man $\theta = \frac{1}{2}$ setzt, und die Gleichungen, zu welchen Herr *Wertheim* durch seine Versuche geführt worden ist *), wenn man $\theta = 1$ macht. Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Ortes von dV im ursprünglichen Zustande des Körpers durch x, y, z, die Verrückungen in den Richtungen der Axen, die dasselbe bei der Formveränderung erlitten hat, durch u, v, w, die Kräfte, die auf dasselbe in den Richtungen der Axen wirken, durch XdV, YdV, ZdV; nennt man ferner dO ein Element der Oberfläche des Körpers und $(X)dO$, $(Y)dO$, $(Z)dO$ die Druckkräfte, die auf dasselbe in den Richtungen der Axen ausgeübt werden, so ist der Werth von δP, der in die Gleichung (1.) gesetzt werden mufs, folgender:

$$(2.)\quad \delta P = \int dV(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) + \int dO((X)\delta u + (Y)\delta v + (Z)\delta w));$$

wo das erste Integral über das ganze Volumen, das zweite über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen ist.

Dafs die Gleichung (1.) für den Fall, dafs u, v, w unendlich klein sind, wirklich die bekannten Gleichungen für die Formveränderungen elastischer Körper liefert, davon überzeugt man sich leicht durch folgende Rechnung.

Es seien α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche eine durch den Punct (x, y, z) gezogene Linie mit den Coordinaten-Axen bildet: die Dilatation

*) Ann. de ch. et de ph. 3e sér. XXIII. p. 52.

in der Richtung dieser Linie für den Punct (x, y, z), die durch λ bezeichnet werden möge, ist dann unter der Voraussetzung, dafs u, v, w, also auch die Differentialquotienten dieser Gröfsen nach x, y, z, unendlich klein sind, durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\lambda = \alpha^2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta^2\frac{\partial v}{\partial y}+\gamma^2\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$+\beta\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\alpha\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Die Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 sind die Werthe von λ für diejenigen Werthe von α, β, γ, für welche die Variation $\delta\lambda$ verschwindet; d. h. sie sind die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\lambda\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\lambda\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\lambda\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$
$$+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Es folgt daraus:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

und ferner

$$\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

also auch

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Diese Werthe von $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ und $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$ sind in die Gleichung (1.) zu substituiren *). Wir schreiben dieselbe wie folgt:

$$(3.)\qquad \delta P - K\delta\Omega = 0,$$

*) Die Gleichung, die durch diese Substitution entsteht, findet sich in wenig veränderter Gestalt schon in einer Abhandlung von *G. Green*, „On the laws of reflexion and refraction of light, Camb. Phil. Trans. VII."; sie ist dort auf andere Weise, als hier, ohne Betrachtung der Hauptdilatationen abgeleitet.

indem wir

$$(4.)\qquad \Omega = \int dV(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2)$$

setzen. Die Variation $\delta\Omega$ wird aus drei Theilen bestehen, von denen der erste von δu, der zweite von δv, der dritte von δw abhangt; diese drei Theile wollen wir durch δR, δS, δT bezeichnen; dann ergiebt sich

$$(5.)\qquad \delta\Omega = \delta R+\delta S+\delta T,$$

und man findet:

$$\delta R = \int dV\Big\{\Big(2(1+\theta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}\Big)\frac{\partial\delta u}{\partial x} +\Big(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\frac{\partial\delta u}{\partial z}\Big\}.$$

Aus dem Ausdrucke von δR ergiebt sich der von δS, und aus diesem der von δT, wenn man u, v, w und gleichzeitig x, y, z cyklisch vertauscht. Den Ausdruck von δR zerlege man in drei Integrale, von denen das erste unter dem Integralzeichen den Factor $\frac{\partial\delta u}{\partial x}$, das zweite den Factor $\frac{\partial\delta u}{\partial y}$, das dritte den Factor $\frac{\partial\delta u}{\partial z}$ hat. Auf das erste von den dreien wende man den Satz an der durch die Gleichung

$$\int dVF\frac{\partial G}{\partial x} = -\int dVG\frac{\partial F}{\partial x}-\int dOFG\cos(N,x)$$

ausgesprochen wird, in welcher F und G zwei beliebige Functionen von x, y, z bezeichnen, dV das Element eines begrenzten Raums, dO das Element der Oberfläche desselben und (N, x) den Winkel bedeutet, den die nach dem Innern des begrenzten Raumes gerichtete Normale von dO mit der x Axe bildet; auf das zweite und dritte der Integrale, deren Summe δR ist, wende man die Sätze an, die aus jenem durch Vertauschung von x mit y oder z entstehen; jedesmal mache man dabei $G=\delta u$. Fassen wir dann die nach dV zu nehmenden Integrale zusammen, und eben so die nach dO zu nehmenden, so ergiebt sich

$$\delta R = -\int dV\Big\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\Big\}\delta u$$
$$-\int dO\Big\{\Big(2(1+\theta)\frac{\partial u}{\delta x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}\Big)\cos(N,x) +\Big(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\cos(N,y)+\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\cos(N,z)\Big\}\delta u.$$

Bildet man aus diesem Ausdrucke von δR durch die angegebenen Vertau-

schungen die Ausdrücke von δS und δT, und dann der Gleichung (5.) gemäfs den Werth von $\delta\Omega$; setzt diesen, so wie den Werth von δP aus (2.), in die Gleichung (3.), zieht hier die Integrale zusammen, die über das Volumen des Körpers auszudehnen sind, so wie diejenigen, die sich auf die Oberfläche desselben beziehen, und setzt dann, den Principien der Variationsrechnung gemäfs, die Factoren von δu, δv, δw unter den beiden Integralzeichen $= 0$; so erhält man folgende Gleichungen:

(6.)

Für einen Punct im Innern des Körpers:

$$K\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right\}+X = 0,$$

$$K\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right\}+Y = 0,$$

$$K\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}\right\}+Z = 0.$$

Und für einen Punct der Oberfläche:

$$K\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(N,x)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(N,y)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(N,z)\right\}+(X) = 0,$$

$$K\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}+2\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(N,y)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(N,z)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(N,x)\right\}+(Y) = 0,$$

$$K\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial w}{\partial z}+2\theta\frac{\partial u}{\partial x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(N,z)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(N,x)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(N,y)\right\}+(Z) = 0.$$

Diese Gleichungen sind dieselben wie die, welche *Cauchy* auf einem Wege abgeleitet hat, bei welchem er nicht auf die Betrachtung der Molecularkräfte zurückging; sie gehen in die *Poisson*'schen über, wenn man $\theta = \frac{1}{2}$ setzt, und in die *Wertheim*'schen, wenn $\theta = 1$ gesetzt wird.

Ich werde jetzt eine Ableitung der Gleichung (1.) geben, aus welcher hervorgehen wird, dafs sie eine allgemeinere Gültigkeit hat, als die Gleichungen (6.). Betrachtungen, die denen welche hier folgen ganz ähnlich sind, hat

Lagrange mehrmals in seiner Mechanik, z. B. bei der Herleitung der Gleichgewichtsbedingung eines elastischen Stabes angestellt.

Es sei dV das Volumen eines unendlich kleinen Theils des elastischen Körpers in seinem natürlichen Zustande. Der Zustand, in welchen dieser Theil durch die Formveränderung geräth, kann bekanntlich aus dem natürlichen als auf die Weise hervorgegangen angesehen werden, dafs der Theil ohne Veränderung der relativen Lage seiner Molecülen eine andere Lage im Raume erhalten hat und dann in drei auf einander senkrechten Richtungen (gleichmäfsig in jeder, aber verschieden in den verschiedenen) dilatirt worden ist *). Eine unendlich kleine Kugel geht hiernach in ein Ellipsoïd über, dessen Axen die Richtungen haben, in denen die Dilatationen Statt fanden. Diese Dilatationen werden daher die Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 sein. Die Elasticität des Körpers bewirkt, dafs der betrachtete Theil sich in den Richtungen, in denen er ausgedehnt ist, zusammenzuziehen strebt; die Kräfte, mit denen er sich in denselben zusammenzuziehen strebt, seien $L_1 dV$, $L_2 dV$, $L_3 dV$; die erste von ihnen sucht λ_1, die zweite λ_2, die dritte λ_3 zu verkleinern. Das Moment der ersten Kraft ist daher $-L_1 dV \delta\lambda_1$, das der zweiten $-L_2 dV \delta\lambda_2$, das der dritten $-L_3 dV \delta\lambda_3$, und das Gesammtmoment der drei Kräfte ist

$$-dV(L_1\delta\lambda_1 + L_2\delta\lambda_2 + L_3\delta\lambda_3).$$

Nun sind L_1, L_2, L_3 Functionen von λ_1, λ_2, λ_3. Wir wissen von ihnen, dafs sie gleichzeitig mit λ_1, λ_2, λ_3 verschwinden; ferner, dafs L_1 eine symmetrische Function von λ_2 und λ_3, und dieselbe Function von λ_1, λ_2, λ_3 wie L_2 von λ_2, λ_3, λ_1 und L_3 von λ_3, λ_1, λ_2 sein mufs. Nimmt man daher λ_1, λ_2, λ_3 als unendlich klein an, so wird man

$$\begin{aligned} L_1 &= a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3, \\ L_2 &= b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3, \\ L_3 &= b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3 \end{aligned}$$

setzen können; wo a und b zwei von der Natur des Körpers abhängige Gröfsen bezeichnen. Führt man an Stelle derselben zwei andere K und θ ein, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$a = 2K(1+\theta), \quad b = 2K\theta$$

verbunden sind, so erhält man für das Moment der in dV erzeugten Kräfte den Ausdruck

$$-dV.\delta K(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2)$$

*) Eine Compression will ich als negative Dilatation bezeichnen.

und für das Moment aller in dem Körper erzeugten Kräfte den Ausdruck

$$-\delta K\int dV(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2).$$

Die Summe dieses Moments und des Moments der äufseren Kräfte mufs für den Gleichgewichtszustand verschwinden; wie es durch die Gleichung (1.) ausgesprochen wird.

§. 2.

Jetzt wollen wir zur Betrachtung einer Platte übergehen. Wir setzen in Bezug auf dieselbe voraus, dafs ihre Grundflächen im natürlichen Zustande durch zwei parallele, unendlich nahe Ebenen gebildet werden, ihr Rand durch eine beliebige Cylinder-Oberfläche, die jene senkrecht schneidet. Die Platte hat eine Form-Änderung erlitten durch Kräfte, die auf ihr Inneres wirken und durch Druckkräfte, die auf ihren Rand ausgeübt werden, während ihre Grundflächen frei sind. Diese Kräfte sind endlich nur so grofs, dafs die Dilatationen, die sie hervorbringen, als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Hierdurch ist jedoch nicht ausgesprochen, dafs die Krümmungen, die die Platte erlitten hat, unendlich klein sind; diese wollen wir uns vorläufig als endlich vorstellen.

Um die Anwendung der Gleichung (1.) auf den Fall einer solchen Platte zu vermitteln, machen wir zwei Annahmen, die wir als Ergebnisse des Experiments ansehen und die ganz entsprechend denjenigen sind, welche *Jacob Bernoulli* in Bezug auf einen elastischen Stab macht; nämlich folgende:

1) Jede gerade Linie der Platte, welche ursprünglich senkrecht auf den Grundflächen war, bleibt bei der Form-Änderung gerade und senkrecht auf den Flächen, welche ursprünglich den Grundflächen parallele Ebenen waren;
2) Alle Elemente der Mittelfläche (d. h. derjenigen Fläche, welche im natürlichen Zustande der Platte die Ebene ist, die den Grundflächen parallel in der Mitte zwischen diesen liegt) erleiden bei der Form-Änderung keine Dilatation.

Mit Hülfe dieser beiden Annahmen werden sich die Werthe der Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 für den gegenwärtigen Fall leicht ausdrücken lassen durch die Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche. Man stelle zu diesem Ende folgende, noch auf einen elastischen Körper von beliebiger Form bezügliche Betrachtung an. Man denke sich in dem Körper in seinem ursprünglichen Zustande eine unendlich kleine Kugel und in derselben einen Durchmesser a und eine auf diesem senkrechte Diametral-Ebene A; bei der Form-Änderung geht die Kugel in ein Ellipsoïd über; die Molecülen, die auf a und auf A liegen, liegen dann auf

einem Durchmesser a' und auf einer Diametral-Ebene A' des Ellipsoïds, welche conjugirt zu einander sind. Im Allgemeinen wird daher a' nicht senkrecht auf A' sein. Ist a' senkrecht auf A', so wird a' gleich einer Haupt-Axe des Ellipsoïds sein, und das Maximum und das Minimum der auf a' senkrechten Durchmesser werden gleich den beiden andern Haupt-Axen sein; d. h. es wird die Dilatation von a' die eine Hauptdilatation, und die beiden andern Hauptdilatationen werden das Maximum und das Minimum der auf a' senkrechten Dilatationen sein.

Wendet man diesen Satz auf den Fall der Platte an, so folgt daraus bei Berücksichtigung der Annahme (1.): dafs für irgend einen Punct im Innern der Platte die Dilatation in der Richtung der durch ihn gezogenen Normale der Mittelfläche eine der Hauptdilatationen ist. Wir wollen z die ursprüngliche Entfernung des betrachteten Puncts von der Mittelfläche, z' seine Entfernung von derselben nach der Form-Änderung nennen; gleichzeitig möge durch z' auch die Normale der Mittelfläche nach der Form-Änderung in Rücksicht auf ihre Lage bezeichnet werden. Setzt man

$$z'-z = q,$$

so wird also $\frac{\partial q}{\partial z}$ der Werth einer Hauptdilatation sein. Da diese unendlich klein sein soll, und da q gleichzeitig mit z verschwindet, so mufs q gegen z unendlich klein sein.

Bei Berücksichtigung der Annahme (2.) sieht man, dafs die Dilatation in irgend einer auf z' senkrechten Richtung $= \frac{z'}{\varrho}$ ist, wenn ϱ den Krümmungsradius der Curve, in welcher die durch z' und die betreffende Richtung gelegte Ebene die Mittelfläche schneidet, für den Fufspunct von z' bezeichnet. Nennt man daher die Krümmungsradien der Hauptschnitte der Mittelfläche für den Fufspunct von z', ϱ_1 und ϱ_2, so sind $\frac{z'}{\varrho_1}$ und $\frac{z'}{\varrho_2}$ die Werthe der beiden andern Hauptdilatationen. Da $z'-z$ unendlich klein gegen z ist, so kann man für diese auch $\frac{z}{\varrho_1}$ und $\frac{z}{\varrho_2}$ schreiben.

Die Werthe der Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3, die jetzt gefunden wurden, substituire man in die Gleichung (1.). Drückt man dann noch das Element des Volumens der Platte durch $df.dz$ aus, indem man unter df das Element der Mittelfläche versteht, so erhält man die Gleichung

$$(7.) \quad 0 = \delta P - K\delta\iint df dz \left\{\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho_2}\right)^2 + \theta\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{z}{\varrho_1} + \frac{z}{\varrho_2}\right)^2\right\}.$$

Bezeichnet man die Dicke der Platte durch 2ε, so ist die Integration in Bezug auf z von $z = -\varepsilon$ bis $z = \varepsilon$ zu nehmen.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs sich die eine der Hauptdilatationen $\frac{\partial q}{\partial z}$ durch die beiden andern $\frac{z}{\varrho_1}$ und $\frac{z}{\varrho_2}$ ausdrücken läfst, ohne dafs dazu die Kenntnifs der Kräfte nöthig wäre, welche die Form-Änderung der Platte bewirkt haben. Es ist zu dem Ende der Werth von δP, der durch die Gleichung (2.) gegeben ist, näher untersuchen. Das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches sich diese Gleichung bezieht, wähle man so, dafs die xy Ebene die Mittelfläche in dem natürlichen Zustande der Platte ist; dann behält z die Bedeutung, die ihm hier gegeben wurde. Man bezeichne die Winkel, welche die Normale der Mittelfläche z' mit den Coordinaten-Axen bildet, durch (z', x), (z', y), (z', z), die ursprünglichen Coordinaten des Fufspuncts von z' durch x_0, y_0, 0, die Verrückungen, die dieser Punct in den Richtungen der Axen erlitten hat, durch u_0, v_0, w_0, so ist der Annahme (1.) zufolge:

$$\begin{aligned} x+u &= x_0+u_0+z'\cos(z',x),\\ y+v &= y_0+v_0+z'\cos(z',y),\\ z+w &= \qquad w_0+z'\cos(z',z), \end{aligned}$$

oder, da $z'-z$ unendlich klein gegen z ist:

$$\begin{aligned} x+u &= x_0+u_0+z\cos(z',x),\\ y+v &= y_0+v_0+z\cos(z',y),\\ z+w &= \qquad w_0+z\cos(z',z). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(8.)\quad \begin{cases} \delta u = \delta u_0+z\delta\cos(z',x),\\ \delta v = \delta v_0+z\delta\cos(z',y),\\ \delta w = \delta w_0+z\delta\cos(z',z). \end{cases}$$

Diese Werthe von δu, δv, δw sind in die Gleichung (2.) zu subsituiren. Die zweiten Theile derselben sind, da sie den Factor z enthalten, unendlich klein gegen die ersten und können daher gegen diese im Allgemeinen vernachlässigt werden; wir haben sie beibehalten, um den Fall von den obigen Betrachtungen nicht auszuschliefsen, indem die Integrale

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Zz\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)z\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)z\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Z)z\,dz$$

von derselben Ordnung sind wie die Integrale

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} X\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Y\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Z\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,dz,\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Z)\,dz.$$

Stellt man sich die Werthe von δu, δv, δw aus (8.) in (2.) substituirt vor, so sieht man, dafs δP unabhängig von δq ist; es folgt daraus, dafs das von δq abhängige Glied des zweiten Theils der Gleichung (7.) für sich verschwinden mufs. Daraus folgt

$$(1+\theta)\frac{\partial q}{\partial z}+\theta\left(\frac{z}{\varrho_1}+\frac{z}{\varrho_2}\right)=0$$

oder

$$\frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{z}{\varrho_1}+\frac{z}{\varrho_2}\right).$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{\partial q}{\partial z}$ in die Gleichung (7.), so giebt sie:

$$0=\delta P-K\delta\iint df\,dz\,z^2\left\{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right\},$$

oder, wenn man die Integration nach z ausführt:

$$(9.)\qquad 0=\delta P-\tfrac{2}{3}\varepsilon^3 K\delta\int df\left(\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right).$$

§. 3.

Die gefundene allgemeine Gleichgewichtsbedingung für eine Platte wollen wir nun auf den Fall anwenden, den *Poisson* behandelt hat: auf den Fall nämlich, dafs die Platte sich nur unendlich wenig von ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt hat. Wir beginnen mit der weitern Entwicklung des Werths von δP.

Ist w_0 eine unendlich kleine Gröfse erster Ordnung, so werden, da die Mittelfläche keine Dilatationen erlitten haben soll, u_0 und v_0 unendlich kleine Gröfsen zweiter Ordnung sein; daher lassen sich δu_0 und δv_0 als unendlich klein gegen δw_0 betrachten und die Gleichungen (8.) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\delta u &= z\,\delta\cos(z',x),\\ \delta v &= z\,\delta\cos(z',y),\\ \delta w &= \delta w_0+z\,\delta\cos(z',z).\end{aligned}$$

Ferner ist in dem vorliegenden Falle, wenn man wiederum nur unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung berücksichtigt:

$$\cos(z',x)=-\frac{\partial w_0}{\partial x_0},\quad \cos(z',y)=-\frac{\partial w_0}{\partial y_0},\quad \cos(z',z)=1;$$

und daher wird:

$$\delta u=-z\frac{\partial\delta w_0}{\partial x_0},\quad \delta v=-z\frac{\partial\delta w_0}{\partial y_0},\quad \delta w=\delta w_0.$$

Diese Werthe substituire man in die Gleichung (2.). Drückt man dann wieder

das Element des Volumens der Platte durch $df\,dz$ aus und das Element der Oberfläche ihres Randes durch $ds\,dz$, indem man unter ds das Element der Contour ihrer Mittelfläche versteht, und schreibt der Bequemlichkeit wegen w, x, y statt w_0, x_0, y_0, so ergiebt sich:

$$\delta P = \iint df\,dz \left\{ Z\delta w - z\left(X\frac{\partial \delta w}{\partial x} + Y\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+\iint ds\,dx \left\{(Z)\delta w - z\left((X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right)\right\}.$$

Die Kräfte X, Y, Z und die Druckkräfte (X), (Y), (Z) lassen sich hier als unabhängig von w betrachten, weil w unendlich klein sein soll. Den Ausdruck von δP wollen wir noch umformen. Er läfst sich zunächst auf folgende Weise schreiben:

$$\delta P = \iiint dx\,dy\,dz \left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w$$
$$-\iiint z\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial X\delta w}{\partial x} - \iiint z\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Y\delta w}{\partial y}$$
$$+\iiint ds\,dz\left\{(Z)\delta w - z\left((X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right)\right\}.$$

Das zweite und dritte dieser vier Integrale läfst sich umgestalten durch Anwendung der Formeln:

$$(10.)\quad \begin{cases} \int dx\,dy\,\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\int ds\cos\varphi F, \\ \int dx\,dy\,\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\int ds\sin\varphi F. \end{cases}$$

In denselben bedeutet F eine beliebige Function von x und y; die zweifache Integration ist über eine begrenzte Fläche, die einfache über die Contour derselben auszudehnen; φ bezeichnet denjenigen Winkel, den die nach dem Innern der begrenzten Fläche gerichtete Normale der Contour mit der positiven x Axe bildet, und den diese Axe beschreibt, wenn sie in derjenigen Richtung gedreht wird (bis sie jener Normale parallel ist), in der sie gedreht werden mufs, damit sie nach einer Drehung um 90° die Lage der positiven y Axe einnimmt. Durch Benutzung dieser Formeln erhält man für δP folgenden Werth:

$$\delta P = \iiint dx\,dy\,dz\left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w$$
$$+\iint ds\,dz\,\{(Z) + z(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\}\,\delta w$$
$$-\iint z\,ds\,dz\left\{(X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right\}.$$

In den letzten dieser drei Theile von δP führe man an die Stelle von $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ den Differentialquotienten von δw nach der nach Innen gerichteten Normale der Contour, $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$, und den Differentialquotienten von δw nach dem Bogen der Contour, $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$, ein. Man nehme den Bogen s in der Richtung als so wachsend an, dafs der Winkel, den die in der Richtung des wachsenden Bogens gezogene Tangente mit der positiven x Axe bildet, und den diese Axe beschreibt, wenn sie in der Weise gedreht wird, die bei der Definition von φ bezeichnet worden ist, bis sie der Tangente parallel wird, $=\varphi - 90^0$ ist. Dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial N}\cos\varphi + \frac{\partial \delta w}{\partial s}\sin\varphi, \\ \frac{\partial \delta w}{\partial y} = \frac{\partial \delta w}{\partial N}\sin\varphi - \frac{\partial \delta w}{\partial s}\cos\varphi. \end{cases}$$

Es wird daher:

$$\begin{aligned} &\iint z\,ds\,dz \left\{(X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right\} \\ &= \iint z\,ds\,dz \left\{(X)\cos\varphi + (Y)\sin\varphi\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial N} \\ &+ \iint z\,ds\,dz \left\{(X)\sin\varphi - (Y)\cos\varphi\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial s}. \end{aligned}$$

Das zweite der Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung stellen wir uns partiell nach s integrirt vor; dabei verschwindet das aus dem Integralzeichen hervortretende Glied, indem die Integration sich auf eine geschlossene Curve bezieht; dann substituire man für die linke Seite der Gleichung die rechte in den Ausdruck von δP. Dies giebt

$$\begin{aligned} (12.)\quad \delta P = &\iiint dx\,dy\,dz \left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w \\ &+ \iint ds\,dz \left\{(Z) + z\frac{\partial((X)\sin\varphi - (Y)\cos\varphi)}{\partial s} + z(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\right\}\delta w \\ &- \iint ds\,dz\,z \left\{(X)\cos\varphi + (Y)\sin\varphi\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial N}. \end{aligned}$$

Nun bilde man den zweiten Theil der rechten Seite der Gleichung (9.). Wir stellen uns durch einen Punct der Mittelfläche, der die Coordinaten x, y, w hat, eine Ebene gelegt vor, die der z Axe parallel ist und mit der xz Ebene den Winkel ϑ bildet; ρ sei der Krümmungsradius des Schnittes dieser Ebene

und der Mittelfläche für den Punct (x, y, w), so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\vartheta.$$

Die Werthe von $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ sind das Maximum und das Minimum von $\frac{1}{\varrho}$; sie sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varLambda\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \varLambda\right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2.$$

Diese Werthe sind in die Gleichung (9.) zu substituiren. Man setze

$$(13.)\quad \begin{cases} Q = \iint dx\,dy\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right), \\ R = \iint dx\,dy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2, \end{cases}$$

so giebt die Gleichung (9.)

$$(14.)\quad \delta P - \tfrac{2}{3}\varepsilon^3 K\left(\delta Q + \frac{\theta}{1+\theta}\delta R\right) = 0.$$

Nun ist Bildung von δQ und δR nöthig. Es findet sich

$$(15.)\quad \delta Q = 2\iint dx\,dy\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right\}.$$

Es ist aber:

$$\iint dx\,dy\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}$$

$$= \iint dx\,dy\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w}{\partial x}}{\partial x} - \iint dx\,dy\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\delta w}{\partial x} + \iint dx\,dy\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\delta w,$$

$$\iint dx\,dy\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}$$

$$= \iint dx\,dy\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}}{\partial x} - \iint dx\,dy\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\delta w}{\partial y} + \iint dx\,dy\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\delta w,$$

und auch

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}$$

$$=\iint dx\,dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial \delta w}{\partial x}}{\partial y}-\iint dx\,dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y^2}\,\delta w}{\partial x}+\iint dx\,dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\,\delta w,$$

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}$$

$$=\iint dx\,dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\frac{\partial \delta w}{\partial y}}{\partial y}-\iint dx\,dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\,\delta w}{\partial y}+\iint dx\,dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\,\delta w.$$

Diese vier Gleichungen addire man. Auf der linken Seite der resultirenden Gleichung erhält man dann $\frac{1}{2}\delta Q$; auf der rechten Seite derselben verwandele man diejenigen Integrale, welche unter den Integralzeichen das Element der Fläche mit einem nach x oder nach y genommenen Differentialquotienten multiplicirt enthalten, mit Hülfe der Formeln (10.) in Integrale, die sich auf die Contour der Mittelfläche beziehen. In einem Theile dieser Integrale kommen die Differentialquotienten $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ vor; diese drücke man mit Hülfe der Gleichungen (11.) durch $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$ aus und integrire die Glieder, welche $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$ enthalten, partiell nach s. Die Glieder, welche hierbei vor die Integralzeichen treten, verschwinden, weil die Integration sich auf eine geschlossene Curve bezieht und es ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(16.)\quad \delta Q = {} & 2\iint dx\,dy\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}\partial w \\ & +2\int ds\left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right. \\ & \left.-\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)}{\partial s}\right\}\delta w \\ & -2\int ds\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial N}.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$(17.)\quad \delta R = 2\iint dx\,dy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right).$$

Es ist aber, wenn F und G zwei beliebige Functionen von x und y bezeichnen:

$$\iint dx\,dy\,F\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)$$

$$=\iint dx\,dy\,G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\int ds\,\frac{\partial F}{\partial N}\,G-\int ds\,F\,\frac{\partial G}{\partial N};$$

setzt man also

$$F = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad G = \delta w$$

und berücksichtigt, dafs

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\varphi$$

ist, was aus den Gleichungen (11.) folgt; so ergiebt sich

$$(18.) \quad \delta R = 2\iint dx\,dy \left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}\delta w$$
$$+ 2\int ds \left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right\}\delta w$$
$$- 2\int ds \left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial N}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (12., 16. und 18.) bilde man nun die Gleichung (14.); die linke Seite derselben läfst sich darstellen als die Summe von drei Integralen, von denen das erste über die Mittelfläche selbst, die beiden andern über die Contour derselben auszudehnen sind, und von denen die beiden ersten unter den Integralzeichen den Factor δw haben, das letzte den Factor $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$ hat. Den Principien der Variationsrechnung gemäfs müssen die Gröfsen, mit denen δw und $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$ multiplicirt vorkommen, verschwinden. Man erhält demnach die partielle Differentialgleichung

$$(19.) \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Z\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz$$
$$= \tfrac{4}{3}\varepsilon^3 K \frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)$$

und die beiden Grenzbedingungen

$$(20.) \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Z)\,dz + \frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\varphi \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (X) z\,dz - \cos\varphi \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Y) z\,dz\right)$$
$$+ \cos\varphi \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz + \sin\varphi \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz$$
$$= \tfrac{4}{3}\varepsilon^3 K \left\{\frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi \sin\varphi\right)\right\},$$

$$(21.)\qquad \cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)z\,dz+\sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)z\,dz$$

$$=\tfrac{4}{3}\varepsilon^3K\left\{\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}.$$

Die Gleichung (19.) stimmt mit der partiellen Differentialgleichung, welche *Poisson* abgeleitet hat, überein; abgesehen davon, dafs *Poisson* $\theta=\frac{1}{2}$ gesetzt hat, während hier θ unbestimmt gelassen ist. Die drei Grenzbedingungen von *Poisson* lassen sich darstellen durch die Gleichungen (20., 21.) und die Gleichung

$$(22.)\qquad \sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)z\,dz-\cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)z\,dz$$

$$=-\tfrac{4}{3}\varepsilon^3K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right).$$

Ich werde jetzt nachweisen, dafs w bis auf eine additive lineare Function von x und y, die willkürlich bleibt, durch die Gleichungen (19., 20., 21.) bestimmt ist. Daraus folgt dann, dafs den *Poisson*schen Gleichungen nur in den speciellen Fällen genügt werden kann, in welchen die gegebenen Kräfte von der Art sind, dafs die Gleichung (22.) von selbst erfüllt wird, sobald die Gleichungen (19., 20., 21.) erfüllt sind.

Es seien w_1 und w_2 zwei Functionen, die, statt w gesetzt, den Gleichungen (19., 20., 21.) genügen; dann erfüllt $w_1-w_2=w$ die Gleichungen, die aus den eben genannten entstehen, wenn an die Stelle der linken Theile derselben 0 gesetzt wird. Ich werde beweisen, dafs diesen Gleichungen nur durch eine lineare Function von x und y genügt werden kann.

Man stelle sich den Werth von

$$\delta Q+\frac{\theta}{1+\theta}\delta R$$

gebildet vor: einmal mit Hülfe der Gleichungen (15. und 17.), dann mit Hülfe der Gleichungen (16. und 18.), und die beiden Ausdrücke, die man dadurch erhält, einander gleich gesetzt. In der identischen Gleichung, die man dann hat, mache man $\delta w=iw$, wobei unter i eine unendlich kleine Constante verstanden wird. Läfst man darauf den Factor $2i$, der sich in derselben findet, weg, so wird sie:

$$\iint dx\,dy\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}$$
$$=\iint dx\,dy\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}w$$
$$+\int ds\left\{\frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)\right\}w$$
$$-\int ds\left\{\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}\frac{\partial w}{\partial N}.$$

Genügt nun w den Gleichungen, in welche die Gleichungen (19., 20., 21.) übergehen, wenn man an Stelle ihrer linken Theile 0 setzt, so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung; es verschwindet also auch die linke. Diese besteht aber, da θ positiv ist, aus einer Summe von lauter positiven Gröfsen: es müssen daher alle diese Gröfsen für sich verschwinden, und also für alle Puncte der Mittelfläche der Scheibe die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

erfüllt werden. Diesen Gleichungen aber kann nur durch eine lineare Function von x und y genügt werden.

§. 4.

Die Gleichungen (19., 20., 21.) im vorigen Paragraphen will ich nun anwenden, um die Gesetze der Schwingungen einer freien, kreisförmigen Scheibe herzuleiten. Aus denselben ergiebt sich für die Schwingungen einer beliebig gestalteten Scheibe die partielle Differentialgleichung

$$(1.)\qquad 0=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\tfrac{8}{3}\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\,\varepsilon^2 K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right),$$

in welcher ρ die Dichtigkeit der Scheibe bezeichnet, nebst den Grenzbedingungen

$$(2.)\quad\begin{cases}0=\dfrac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\varphi+\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right)\\ \qquad-\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right),\\ 0=\dfrac{\theta}{1+\theta}\left(\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right).\end{cases}$$

Man erhält diese Gleichungen, indem man in jenen $(X)=(Y)=(Z)=0$,

$X = -\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $Y = -\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $Z = -\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ setzt und berücksichtigt, dafs den beiden in (§. 2.) gemachten Annahmen zufolge $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ nicht unendlich grofs gegen $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ sein können. Zu den Bedingungen (1. und 2.) sind noch die hinzuzufügen, dafs für $t = 0$, w und $\frac{\partial w}{\partial t}$ in zwei gegebene Functionen von x und y übergehen; dann wird w vollkommen bestimmt sein.

Wir suchen zuerst eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1), die die Gleichungen (2.) erfüllt. Diese wird sich dann so verallgemeinern lassen, dafs auch den Bedingungen, die für $t = 0$ gelten, genügt wird.

Man setze der Kürze wegen

$$\tfrac{2}{3}\frac{1+2\theta}{1+\theta}\varepsilon^2\frac{K}{\varrho} = a^2$$

und

$$(3.)\qquad w = u\sin(4\lambda^2 at);$$

wo u eine Function von x und y, λ eine Constante bezeichnet, über die zu verfügen wir uns vorbehalten Durch (3.) wird der Gleichung (1.) genügt werden, wenn u folgende Gleichung erfüllt:

$$(4.)\qquad 16\lambda^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

Diese kann ersetzt werden durch die zwei Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} 4\lambda^2 v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ 4\lambda^2 u = \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Macht man

$$(6.)\qquad u = S + D, \qquad v = S - D,$$

so folgen für S und D die Differentialgleichungen

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2},$$
$$-4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}.$$

Nun führe man an die Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten r, ψ ein; dann werden die letzten Gleichungen:

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial\psi^2},$$
$$-4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial\psi^2}.$$

Diesen wird genügt, wenn man

$$(7.)\quad \begin{cases} S = A.\cos n\psi.X, \\ D = B.\cos n\psi.Y \end{cases}$$

setzt, wo A und B willkürliche Constanten, n eine ganze Zahl und X und Y zwei Functionen von r bezeichnen, die die Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \frac{d^2X}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dX}{dr}-\left(\frac{n^2}{r^2}+4\lambda^2\right)X = 0, \\ \frac{d^2Y}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY}{dr}-\left(\frac{n^2}{r^2}-4\lambda^2\right)Y = 0 \end{cases}$$

erfüllen. Führt man

$$x = \lambda r$$

ein, so werden diese Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dX}{dx}-\left(\frac{n^2}{x^2}+4\right)X = 0, \\ \frac{d^2Y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}-\left(\frac{n^2}{x^2}-4\right)Y = 0. \end{cases}$$

Particuläre Integrale sind die folgenden:

$$(10.)\quad \begin{cases} X^{(n)}=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left(1+\frac{x^2}{1.n+1}+\frac{x^4}{1.2.n+1.n+2}+\frac{x^6}{1.2.3.n+1.n+2.n+3}+\text{etc.}\right), \\ Y^{(n)}=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left(1-\frac{x^2}{1.n+1}+\frac{x^4}{1.2.n+1.n+2}-\frac{x^6}{1.2.3.n+1.n+2.n+3}+\text{etc.}\right) \end{cases}$$

und andere particuläre Integrale:

$$(11.)\quad \begin{cases} X^{(n)'} = X^{(n)}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{xX^{(n)}X^{(n)}}, \\ Y^{(n)'} = Y^{(n)}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{xY^{(n)}Y^{(n)}}; \end{cases}$$

wo x_0 eine beliebige, endliche Gröfse bezeichnet. Die allgemeinen Integrale der Gleichungen (9.) sind also

$$X = \alpha X^{(n)}+\alpha' X^{(n)'},$$
$$Y = \beta Y^{(n)}+\beta Y^{(n)'}.$$

Aus den Gleichungen (11.) geht hervor, dafs $X^{(n)'}$ und $Y^{(n)'}$ für $x=0$ unendlich werden; wir nehmen an, dafs die Scheibe eine volle, keine ringförmige ist; dann müssen für $r=0$, d. h. für $x=0$, u und v, also auch X und Y endlich bleiben, und daher müssen α' und β' verschwinden. Die Constanten α und β lassen sich, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $=1$ setzen, da wir in die Gleichungen (7.) die Constanten A und B eingeführt

haben, und daher statt der Gleichungen (7.) schreiben:

$$(12.)\quad \begin{cases} S = A\cos n\psi . X^{(n)}, \\ D = B\cos n\psi . Y^{(n)}, \end{cases}$$

wo $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ die durch die Gleichungen (10.) bestimmten Functionen bedeuten. Ich bemerke, dafs $Y^{(n)}$ die Function ist, für welche *Bessel* die Bezeichnung

$$I_{2x}^{n}$$

eingeführt hat.

Wir werden jetzt über die Constanten A, B, λ so zu verfügen suchen, dafs den Gleichungen (2.) genügt wird. In diesen Gleichungen ist der Bogen s in derjenigen Richtung als wachsend anzusehen, die bei den Gleichungen (11.) (§. 3.) bezeichnet ist. Aus der dort gemachten Bestimmung geht hervor, dafs, wenn man ψ in derjenigen Richtung wachsen läfst und den Anfangspunct von s so wählt, dafs

$$s = l\psi$$

wird, wo l den Radius der Scheibe bezeichnet,

$$\varphi = \psi + 180^{\circ}$$

ist. Benutzt man Dies, so nehmen die Gleichungen (2.) durch Einführung der Polarcoordinaten r, ψ, statt der rechtwinkligen, folgende Gestalt an:

$$(13.)\quad \begin{cases} \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right) = 0, \\ \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen für $r = l$, für alle Werthe von ψ erfüllt werden, und für alle Werthe von t. Nach (3.) müssen daher auch die Gleichungen bestehen, welche man aus (13.) findet, wenn man u statt w schreibt. Diese Gleichungen geben, wenn man berücksichtigt, dafs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 4\lambda^2 v$$

ist, was die erste der Gleichungen (5.) aussagt:

$$4\lambda^2\frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial \psi^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0;$$

$$4\lambda^2\frac{\theta}{1+\theta}v \quad +\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0.$$

Führt man hier für u und v ihre Werthe ein, die sich aus (6. und 12.) ergeben, ersetzt r durch $\frac{x}{\lambda}$, drückt die zweiten Differentialquotienten von

$X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ mit Hülfe von (9.) durch diese Functionen selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus und macht endlich

$$\frac{1+2\theta}{1+\theta}=\gamma,$$

so ergiebt sich

$$(14.)\quad \begin{cases} 0=A\left\{n^2X^{(n)}-x(n^2-4\gamma x^2)\dfrac{dX^{(n)}}{dx}\right\}+B\left\{n^2Y^{(n)}-x(n^2+4\gamma x)\dfrac{dY^{(n)}}{dx}\right\}, \\ 0=A\left\{(n^2+4\gamma x^2)X^{(n)}-x\dfrac{dX^{(n)}}{dx}\right\}+B\left\{(n^2-4\gamma x^2)Y^{(n)}-x\dfrac{dY^{(n)}}{dx}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind zu erfüllen für $r=l$, d. h. für $x=\lambda l$. Hierzu ist nöthig, dafs ihre Determinante verschwinde, da A und B nicht $=0$ sein sollen. Es mufs also für $x=\lambda l$:

$$(15.)\quad 0=\begin{aligned}[t] &8\gamma n^2x^2X^{(n)}Y^{(n)} \\ &-8\gamma n^2x^3\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) \\ &-(n^2(n^2-1)x+16\gamma^2x^5)\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}-Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) \\ &+8\gamma x^4\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}\end{aligned}$$

sein. Bestimmt man aus dieser Gleichung λ und aus einer der beiden Gleichungen (14.) das Verhältnifs von A und B, so ist den Bedingungen (2.) genügt. Wir wollen eine Wurzel der Gleichung (15.) durch $\lambda_{n\mu}$ bezeichnen und

$$(16.)\quad U_{n\mu}=X^{(n)}\left\{(n^2-4\gamma x^2)Y^{(n)}-x\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}_{x=\lambda_{n\mu}l} - Y^{(n)}\left\{(n^2+4\gamma x^2)X^{(n)}-x\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\}_{x=\lambda_{n\mu}l}$$

setzen; dann wird den Gleichungen (1. und 2.) durch

$$w=C_{n\mu}\sin(4\lambda_{n\mu}^2at)\cos n\psi\, U_{n\mu},$$

oder auch durch

$$(17.)\quad w=\{\cos(4\lambda_{n\mu}^2at)(A_{n\mu}\cos n\psi+B_{n\mu}\sin n\psi) + \sin(4\lambda_{n\mu}^2at)(C_{n\mu}\cos n\psi+D_{n\mu}\sin n\psi)\}U_{n\mu}$$

genügt; wo $A_{n\mu}$, $B_{n\mu}$, $C_{n\mu}$, $D_{n\mu}$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Wir wollen nun die Gleichung (15.) näher untersuchen und zuerst die Seite derselben rechts in eine Reihe entwickeln, die nach positiven Po-

tenzen von x fortschreitet. Wir müssen zunächst das Product $X^{(n)}Y^{(n)}$ bilden. Hierbei läfst sich aber die directe Multiplication der unendlichen Reihen (10.) umgehen. Man kann nämlich durch Benutzung der Differentialgleichungen (9.), denen $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ genügen, eine lineäre Differentialgleichung vierter Ordnung für $X^{(n)}Y^{(n)}$ finden und aus dieser das Product bestimmen, indem man auf die Form Rücksicht nimmt, die dasselbe augenscheinlich haben mufs. Man setze

$$H = X^{(n)}Y^{(n)}$$

und bilde durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung die Werthe der vier ersten Differentialquotienten von H nach x. Dann drücke man die zweiten und höheren Differentialquotienten von $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ mit Hülfe von (9.) durch diese Functionen selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus. Dadurch erhält man fünf Gleichungen, welche H und dessen vier erste Differentiäl-quotienten angeben, als lineare homogene Functionen der vier Gröfsen

$$X^{(n)}Y^{(n)}, \quad X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}, \quad Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Die erste dieser fünf Gleichungen multiplicire man mit (1.), die andern der Reihe nach mit den unbestimmten Coëfficienten A_1, A_2, A_3, A_4, addire alle und bestimme diese Coëfficienten so, dafs in der Summe die Factoren jener vier Gröfsen verschwinden; dann ergiebt sich identisch:

$$(18.) \qquad 0 = H + A_1\frac{dH}{dx} + A_2\frac{d^2H}{dx^2} + A_3\frac{d^3H}{dx^3} + A_4\frac{d^4H}{dx^4}.$$

Schreibt man die Gleichungen, durch welche die zweiten und höhern Differentialquotienten von $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ durch diese Gröfsen selbst und deren erste Differentialquotienten ausgedrückt werden, folgendermaafsen:

$$\frac{d^2X^{(n)}}{dx^2} = a_2X^{(n)} + a_2'\frac{dX^{(n)}}{dx}, \qquad \frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2} = b_2Y^{(n)} + b_2'\frac{dY^{(n)}}{dx},$$
$$\frac{d^3X^{(n)}}{dx^3} = a_3X^{(n)} + a_3'\frac{dX^{(n)}}{dx}, \qquad \frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3} = b_3Y^{(n)} + b_3'\frac{dY^{(n)}}{dx},$$
$$\frac{d^4X^{(n)}}{dx^4} = a_4X^{(n)} + a_4'\frac{dX^{(n)}}{dx}, \qquad \frac{d^4Y^{(n)}}{dx^4} = b_4Y^{(n)} + b_4'\frac{dY^{(n)}}{dx},$$

so ergeben sich für die Coëfficienten A die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 \; + (a_2+b_2)A_2 + (a_3+b_3)A_3 + (a_4+b_4+6a_2b_2)A_4 &= 0,\\
A_1 + a_2'A_2 + (a_3'+3b_2)A_3 + (a_4'+4b_3+6a_2'b_2)A_4 &= 0,\\
A_1 + b_2'A_2 + (b_3'+3a_2)A_3 + (b_4'+4a_3+6a_2b_2')A_4 &= 0,\\
2A_2 + 3(a_2'+b_2')A_3 + (4a_3'+4b_3'+6a_2'b_2')A_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Substituirt man in diese Gleichungen für die Gröfsen a, b ihre Werthe, die

sich aus (9.) ergeben, löset dieselben auf und setzt die Werthe von A_1, A_2, A_3, A_4, die man findet, in die Gleichung (18.), so wird diese zu:

$$0 = 64H + \frac{4n^2-1}{x^3}\frac{dH}{dx} - \frac{4n^2-1}{x^2}\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{d^3H}{dx^3} + \frac{d^4H}{dx^4}.$$

Aus (10.) folgt aber, dafs

$$(19.)\quad H = X^{(n)}Y^{(n)} = \frac{x^{2n}}{(1.2.3\ldots n)^2}(1 + B_1x^4 + B_2x^8 + B_3x^{12} + B_4x^{16} + \ldots)$$

sein mufs; substituirt man diese Reihe in die eben gefundene Differentialgleichung, so findet sich

$$B_k = -\frac{B_{k-1}}{k.n+k.n+2k-1.n+2k},$$

also

$$(20.)\quad B_k = \frac{(-1)^k}{1.2\ldots k.n+1.n+2\ldots n+k.n+1.n+2\ldots n+2k}.$$

Um die Gleichung (15.) zu bilden, sind ferner die Ausdrücke:

$$X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx},\quad X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx},\quad \frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}$$

zu entwickeln. Wir benutzen hierzu die folgenden Gleichungen, die identisch sind in Rücksicht auf die Gleichungen (9.):

$$H = X^{(n)}Y^{(n)},$$

$$\frac{dH}{dx} = X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{2n^2}{x^2}X^{(n)}Y^{(n)} - \frac{1}{x}\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) + 2\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^3H}{dx^3} = -\frac{6n^2}{x^3}X^{(n)}Y^{(n)} + \frac{4n^2+2}{x^2}\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)$$
$$+ 8\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) - \frac{6}{x}\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx} = \frac{dH}{dx},$$

$$X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx} = \frac{d^3H}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2H}{dx^2} - \frac{4n^2-1}{x^2}\frac{dH}{dx},$$

$$\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx} = \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dH}{dx} - \frac{2n^2}{x^2}H.$$

Durch Berücksichtigung der Gleichungen (19. und 20.) werden diese drei Gröfsen der Reihe nach:

$$\frac{2x^{2n-1}}{(1.2\dots n)^2}\left(n+\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}{}^k(n+2k)B_k x^{4k}\right),$$
$$\frac{4x^{2n-3}}{(1.2\dots n)^2}\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}{}^k k(n+k)(n+2k)B_k x^{4k},$$
$$\frac{x^{2n-2}}{(1.2\dots n)^2}\left(n^2+\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}{}^k(2(n+2k)^2-n^2)B_k x^{4k}\right).$$

Hiernach wird die Gleichung (15.), wenn man den Factor x^{2n+2} wegläfst, folgende:

$$(21.)\qquad 0=(4\gamma-1)n^2(n-1)+\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}{}^k(-1^k)\frac{E_k}{M_k}x^{4k},$$

wo

$$E_k=-n^2(n^2-1)+4\gamma(n+2k)(n+2k+1)(n(n-1)-2k+4\gamma k(n+k)),$$
$$M_k=1.2\dots k.n+1.n+2\dots n+k.n+1.n+2\dots n+2k+1.$$

Man sieht, dafs die Gleichung (21.), deren Wurzeln, durch l dividirt, die Werthe sind, die für $\lambda_{n\mu}$ gesetzt werden können, nur die Potenzen von x enthält, deren Exponenten Vielfache von 4 sind. Es folgt daraus, dafs, wenn $l\lambda$ eine ihrer Wurzeln ist, auch $-l\lambda$, $l\lambda\sqrt{-1}$ und $-l\lambda\sqrt{-1}$ ihre Wurzeln sind. Ich will jetzt nachweisen, dafs die vierten Potenzen aller Wurzeln der Gleichung (21.) reell und positiv sind; daraus wird dann hervorgehen, dafs unter jeder Gruppe von vier Wurzeln, wie die angegebene deren eine ist, sich eine reelle positive Wurzel befinden mufs. Wie schon früher bemerkt, ist θ eine positive Gröfse; es ist also γ, welches $=\frac{1+2\theta}{1+\theta}$ gesetzt wurde, gröfser als 1. Hieraus folgt, dafs E_k immer positiv ist, dafs also die Glieder der rechten Seite der Gleichung (21.) abwechselnde Zeichen haben. Hiernach ist es unmöglich, dafs die vierte Potenz einer Wurzel dieser Gleichung negativ sei. Dafs sie auch nicht imaginär sein kann, läfst sich auf folgende, indirecte Weise darthun.

Es seien $l\lambda$ und $l\lambda'$ zwei Wurzeln der Gleichung (21.). Für die erste derselben sei die durch (16.) bestimmte Function $U_{n\mu}=U$, für die zweite $=U'$: dann läfst sich zeigen, dafs

$$(22.)\qquad (\lambda^4-\lambda'^4)\int_0^l UU'rdr=0$$

ist. Wir wollen es als bewiesen annehmen und wollen zeigen, dafs dann λ^4 nicht imaginär sein kann. Es sei

$$\lambda=p+q\sqrt{-1},$$
$$U=P+Q\sqrt{-1}.$$

Eine andere Wurzel der Gleichung (21.) mufs dann $(p-q\sqrt{-1})l$ sein. Wir setzen

$$\lambda' = p - q\sqrt{-1}:$$

dann wird

$$U' = P - Q\sqrt{-1}.$$

Die Gleichung (22.) wird dann:

$$pq(p^2-q^2)\int_0^l (P^2+Q^2)r\,dr = 0.$$

Das hier vorkommende Integral kann nicht verschwinden, da es eine Summe von lauter positiven Gröfsen ist, also mufs

$$pq(p^2-q^2) = 0$$

sein; und dieses ist die Bedingung dafür, dafs λ^4 reell ist.

Wir wollen nun die Richtigkeit der Gleichung (22.) erweisen. Daraus, dafs der in (17.) gegebene Ausdruck für w der Gleichung (1.) genügt, folgt, dafs, wenn man

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}-\frac{n^2}{r^2}U = 4\lambda^2 V$$

setzt, gleichzeitig

$$(23.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{dr}-\dfrac{n^2}{r^2}U = 4\lambda^2 V, \\ \dfrac{d^2V}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{dr}-\dfrac{n^2}{r^2}V = 4\lambda^2 U \end{cases}$$

ist. Daraus, dafs derselbe Ausdruck für w die Gleichungen (2.) oder die Gleichungen (13.), welche dieselben sind, erfüllt, folgt, dafs für $r=l$,

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{1+2\theta}{1+\theta}\dfrac{d}{dr}\Big(\dfrac{d^2U}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{dr}-\dfrac{n^2}{r^2}U\Big)-\dfrac{n^2}{r^2}\Big(\dfrac{dU}{dr}-\dfrac{1}{r}U\Big) = 0, \\ \dfrac{\theta}{1+\theta}\Big(\dfrac{d^2U}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{dr}-\dfrac{n^2}{r^2}U\Big)+\dfrac{d^2U}{dr^2} = 0 \end{cases}$$

sein wird. Die Gleichungen (23.) lassen sich wie folgt schreiben:

$$4\lambda^2 V = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U,$$

$$4\lambda^2 U = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n V.$$

Durch Substitution des Werths von V aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die zweite erhält man

$$(25.)\quad 16\lambda^4 U = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich eine Gleichung, die man aus dieser erhält, wenn man U' und λ' statt U und λ setzt. Substituirt man den Werth von

$16\lambda^4 U$ aus (25.) in das Integral

$$16\lambda^4\int UU' r\,dr$$

und integrirt viermal partiell, so kommt man auf das Integral

$$\int r\,dr\,U.\,r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U',$$

und dieses ist

$$=16\lambda'^4\int UU' r\,dr.$$

Man erhält auf dem angedeuteten Wege die Gleichung

$$(26.)\qquad 16\lambda^4-\lambda'^4)\int UU' r\,dr = \frac{1}{r^{n-1}}U'\Big(\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U\Big)$$
$$-\Big(\frac{d}{dr}r^n U'\Big)\Big(\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U\Big)$$
$$+\Big(\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U'\Big)\Big(\frac{d}{dr}r^n U\Big)$$
$$-\Big(\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U'\Big)\frac{1}{r^{n-1}}U.$$

Nun läfst sich zeigen, dafs der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung sowohl für $r=0$, als für $r=l$ verschwindet. Dafs er für $r=0$ verschwindet, ist einzusehen, wenn man erwägt, dafs U und U' von der Form

$$cr^n+c_1r^{n+2}+c_2r^{n+4}+\dots$$

sind. Um zu beweisen, dafs er für $r=l$ verschwindet, wenden wir die Gleichungen (24.) an. Diese lassen sich folgendermaafsen schreiben:

$$\frac{d^2U}{dr^2}=\frac{\theta}{1+2\theta}\Big(\frac{n^2}{r^2}U-\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\Big).$$

$$\frac{d^3U}{dr^3}=-\frac{3n^2}{r^3}U+\frac{n^2+(n^2+1)(1+3\theta)}{(1+2\theta)r^2}\frac{dU}{dr}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und derer, welche aus ihnen entstehen, wenn man U' statt U setzt, drücke man die zweiten und dritten Differentialquotienten von U und U', auf welche man kommt, wenn man die in (26.) angegebenen Differentiationen ausführt, durch U und U' selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus; man findet dann, dafs die Glieder auf der rechten Seite von (26.) sich gegenseitig aufheben. Es folgt daraus die Richtigkeit der Gleichung (22.).

Es ist bis jetzt auf die Bedingungen nicht Rücksicht genommen worden, welche die Lösung unserer partiellen Differentialgleichung für $t=0$ erfüllen soll. Wir werden nun die gefundene Lösung (17.) so zu verallgemeinern suchen, dafs auch diesen Bedingungen genügt werden kann. Von dem Ausdrucke,

der in (17.) $= w$ gesetzt ist, kann man die Summe in Beziehung auf μ und in Beziehung auf n nehmen, und diese Doppelsumme $= w$ setzen. Bei der ersten der beiden Summationen kann man sich darauf beschränken, die reellen positiven Werthe $\lambda_{n\mu}$ zu berücksichtigen; durch die Berücksichtigung der negativen und imaginären Werthe $\lambda_{n\mu}$ gewinnt man nichts an Allgemeinheit des Ausdrucks von w; denn: ist wiederum

$$U_{n\mu} = U \quad \text{für} \quad \lambda_{n\mu} = \lambda$$

und

$$U_{n\mu} = U' \quad \text{für} \quad \lambda_{n\mu} = \lambda',$$

so ist für denselben Werth von r:

$$U = U', \qquad \text{falls} \quad \lambda = -\lambda'$$

und

$$U = (-1)^{n+1} U', \quad \text{falls} \quad \lambda = \lambda' \sqrt{-1}.$$

Wir wollen jetzt unter

$$l\lambda_{n_0},\ l\lambda_{n_1},\ l\lambda_{n_2},\ \ldots\ l\lambda_{n_\mu},\ \ldots$$

die positiven reellen Wurzeln der Gleichung (21.) verstehen, dieselben ihrer Gröfse nach so geordnet, dafs $l\lambda_{n_0}$ die kleinste ist, und wollen

$$w = \sum_0^\infty{}^n \sum_0^\infty{}^\mu \{\cos(4\lambda_{n\mu}^2 at)(A_{n\mu}\cos n\psi + B_{n\mu}\sin n\psi) \\ + \sin(4\lambda_{n\mu}^2 at)(C_{n\mu}\cos n\psi + D_{n\mu}\sin n\psi)\} U_{n\mu}$$

setzen. Die Constanten A, B, C, D müssen nun so bestimmt werden, dafs

$$\text{für } t = 0, \quad w = F(r, \psi),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \Phi(r, \psi)$$

wird, wo F und Φ zwei gegebene Functionen von r und ψ bedeuten. Aus der ersten Bedingung werden sich die Werthe der Gröfsen A, B ergeben, aus der zweiten die Werthe der Gröfsen C, D; und zwar diese auf ganz ähnliche Weise, als jene; es ist also hinreichend, zu zeigen, wie jene gefunden werden können. Die erste Bedingung erfordert, dafs

$$F(r, \psi) = \sum_0^\infty{}^n \sum_0^\infty{}^\mu (A_{n\mu}\cos n\psi + B_{n\mu}\sin n\psi) U_{n\mu}$$

werde. Wir stellen uns $F(r, \psi)$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von ψ entwickelt vor, so dafs

$$F(r, \psi) = F_0(r) + F_1(r)\cos\psi + F_2(r)\cos 2\psi + \ldots \\ + F_1'(r)\sin\psi + F_2'(r)\sin 2\psi + \ldots$$

ist, und dann diese Entwickelung für $F(r, \psi)$ substituirt. Dann zeigt sich, dafs

$$(27.)\quad \begin{cases} F_n(r) = \sum_0^\infty {}^\mu A_{n\mu} U_{n\mu}, \\ F_n'(r) = \sum_0^\infty {}^\mu B_{n\mu} U_{n\mu} \end{cases}$$

sein mufs. Die Functionen $F_n(r)$ und $F_n'(r)$ lassen sich als gegeben betrachten; die Bestimmung der Gröfsen A und B ist also auf die Aufgabe reducirt, eine gegebene Function von r nach den Functionen $U_{n_0}, U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots$ zu entwickeln. Vorausgesetzt, dafs diese Entwicklung möglich ist, kann man die Coëfficienten derselben mit Hülfe des Satzes finden, der durch die Gleichung (22.) ausgesprochen wird. Diese Gleichung zeigt, dafs, wenn μ und μ' zwei verschiedene Zahlen sind,

$$\int_0^l U_{n\mu} U_{n\mu'} r\,dr = 0$$

ist: es folgt daher aus den Gleichungen (27.):

$$A_{n\mu}\int_0^l U_{n\mu} U_{n\mu} r\,dr = \int_0^l F_n(r) U_{n\mu} r\,dr,$$

$$B_{n\mu}\int_0^l U_{n\mu} U_{n\mu} r\,dr = \int_0^l F_n'(r) U_{n\mu} r\,dr.$$

§. 5.

Für die Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung ist die Untersuchung des Falles wichtig, in welchem die Schwingungen der Scheibe, von der Art sind, dafs sie einen reinen Ton erzeugen. Die Verhältnisse der Schwingungszahlen der verschiedenen Töne, welche eine Scheibe geben kann, und die Knotenlinien, die bei jedem einzelnen vorhanden sind, bieten sich hier als die hauptsächlichsten Vergleichungspuncte dar. Mit diesem Falle wollen wir uns jetzt beschäftigen. In demselben mufs w durch folgenden Ausdruck dargestellt sein:

$$(28.)\quad w = \{\cos(4\lambda_{n\mu}^2 at)(A\cos n\psi + B\sin n\psi) + \sin 4\lambda_{n\mu}^2 at(C\cos n\psi + D\sin n\psi)\}\, U_{n\mu}.$$

Der Ton ist durch $\lambda_{n\mu}$ in der Art bestimmt, dafs seine Schwingungszahl, d. h. die Anzahl der Schwingungen, die in der Einheit der Zeit vollführt werden,

$$= \frac{4\lambda_{n\mu}^2 a}{\pi}$$

ist. Die Knotenlinien sind diejenigen Linien, für welche, für alle Werthe von t, $w = 0$ ist; sie werden daher die Puncte enthalten, für welche entweder die Gleichung

$$(29.)\quad U_{n\mu} = 0$$

erfüllt wird, oder die beiden Gleichungen

$$(30.)\quad \begin{cases} A\cos n\psi + B\sin n\psi = 0, \\ C\cos n\psi + D\sin n\psi = 0 \end{cases}$$

bestehen. Die Gleichung (29.) liefert gewisse Werthe von r als Wurzeln. So viele reelle Wurzeln sie hat, die kleiner als l sind, so viele, mit der Peripherie der Scheibe concentrische Kreise werden in der Klangfigur vorkommen; die Anzahl und Gröfse derselben wird allein von dem Tone abhangen und unabhängig sein von den Werthen der Coëfficienten A, B, C, D. Die Gleichungen (30.) werden für keinen Punct erfüllt, wenn nicht

$$A:B = C:D$$

ist; in diesem Falle sind jene Kreise die einzigen Knotenlinien. Besteht diese Proportion, so geben die Gleichungen (30.) n Werthe von ψ, von denen je zwei aufeinanderfolgende um $\frac{\pi}{n}$ unterschieden sind; dann kommen also zu jenen Kreisen noch n Durchmesser als Knotenlinien hinzu, welche die Peripherie der Scheibe in gleiche Theile theilen.

Diese allgemeinen Resultate der Theorie sind im Wesentlichen mit der Erfahrung in Übereinstimmung. Der Versuch zeigt, dafs die Knotenlinien aus Kreisen bestehen, die mit der Peripherie der Scheibe concentrisch sind, und aus Durchmessern, die diese in gleiche Theile theilen, wenn man von gewissen Verzerrungen absieht, die diese Linien erleiden und die, wie mir scheint, hauptsächlich darin ihren Grund haben, dafs die Scheibe nicht vollkommen frei ist, wie die Theorie sie voraussetzt. Der Versuch zeigt aber auch, dafs bei einem Tone, bei dem zuweilen Durchmesser als Knotenlinien vorkommen, die Durchmesser zuweilen fehlen. Fehlen sie, so ordnet sich der auf die Scheibe gestreute Sand zwar auch in Durchmessern an: diese bleiben aber nicht fest während der Bewegung der Scheibe, sondern oscilliren. Wollte man diese interessante Erscheinung zu erklären versuchen, so müfste man die Bewegung eines Sandkornes verfolgen, welches, von einer Stelle der Scheibe fortgeschnellt, auf eine andere fällt, und so von einer Stelle zur anderen geschleudert wird, während die Scheibe selbst die durch die Gleichung (28.) ausgedrückte Bewegung vollführt. Auf diese Betrachtung will ich indessen hier nicht näher eingehen.

Chladni hat durch Versuche gefunden, dafs die Schwingungszahlen der Töne, die in ihren Klangfiguren dieselbe Anzahl von Durchmessern haben, (d. h. der Töne, die demselben Werthe von n entsprechen), mit Ausnahme

der tiefsten, sich nahe wie die Quadrate aufeinanderfolgender, gerader oder ungerader Zahlen verhalten, je nachdem die Zahl der Durchmesser gerade oder ungerade ist. Ich will jetzt nachweisen, dafs die Theorie dasselbe Gesetz liefert. Es geht dies aus einer Umformung der Gleichung (21.) hervor.

Für die Function $Y^{(0)}$, die durch die zweite der Gleichungen (10.) bestimmt ist, hat *Poisson* folgende semiconvergente Reihe entwickelt:

$$Y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big\{(\cos 2x + \sin 2x)\Big(1 - \frac{(1.3)^2}{1.2}\frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1.3.5.7)^2}{1.2.3.4}\frac{1}{(16x)^4} - \dots\Big) + (\sin 2x - \cos 2x)\Big(\frac{1^2}{1}\frac{1}{16x} - \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3} + \frac{(1.3.5.7.9)^2}{1.2.3.4.5}\frac{1}{(16x)^5} - \dots\Big)\Big\}.$$

Auf eine ähnliche Weise findet man

$$X^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\Big\{1 + \frac{1^2}{1}\frac{1}{16x} + \frac{(1.3)^2}{1.2}\frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3} + \dots\Big\}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen (10.)

$$Y^{(n+1)} = -\tfrac{1}{2}x^n\frac{d}{dx}\Big(\frac{Y^{(n)}}{x^{(n)}}\Big),$$

$$X^{(n+1)} = \tfrac{1}{2}x^n\frac{d}{dx}\Big(\frac{X^{(n)}}{x^n}\Big).$$

Setzt man hier $n = 0$ und substituirt für $Y^{(0)}$, $Y^{(0)}$ die eben angegebenen Reihen, so erhält man ähnliche Reihen für $Y^{(1)}$, $X^{(1)}$; aus diesen findet man wiederum ähnliche Reihen für $Y^{(2)}$, $X^{(2)}$, u. s. f. Es ergiebt sich:

$$Y^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big\{(\cos(2x - \tfrac{1}{2}n\pi) + \sin(2x - \tfrac{1}{2}n\pi))\Big(1 - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1.2}\frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)(49-4n^2)}{1.2.3.4}\frac{1}{(16x)^4} + \dots\Big)$$
$$+ (\sin(2x - \tfrac{1}{2}n\pi) - \cos(2x - \tfrac{1}{2}n\pi))\Big(\frac{(1-4n^2)}{1}\frac{1}{16x} - \frac{1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3} + \dots\Big)\Big\},$$

$$X^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\Big\{1 + \frac{(1-4n^2)}{1}\frac{1}{16x} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1.2}\frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3} + \dots\Big\}.$$

Die erste dieser beiden Reihen ist in einer ein wenig andern Form schon von Herrn Professor *Jacobi* in *Schumachers* astronomischen Nachrichten Bd. 28, S. 94 angegeben. Substituirt man diese Werthe von $Y^{(n)}$ und $X^{(n)}$ in die Gleichung (15.), welche identisch mit der Gleichung (21.) ist, so kann

man aus der resultirenden Gleichung $\log(2x-\frac{1}{2}n\pi)$ ausdrücken als den Quotienten zweier Reihen, die nach den Potenzen von $\frac{1}{16x}$ fortschreiten. Es ergiebt sich

$$(31.)\quad \operatorname{tang}(2x-\tfrac{1}{2}n\pi)=\frac{\frac{\mathfrak{B}}{16x}+\frac{\mathfrak{C}}{(16x)^2}-\frac{\mathfrak{D}}{(16x)^3}+\cdots}{\mathfrak{A}+\frac{\mathfrak{B}}{16x}+\frac{\mathfrak{D}}{(16x)^3}+\cdots},$$

wo

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \gamma,\\ \mathfrak{B} &= \gamma(1-4n^2)-8,\\ \mathfrak{C} &= \gamma(1-4n^2)(9-4n^2)+48(1+4n^2),\\ \mathfrak{D} &= -\gamma\tfrac{1}{3}((1-4n^2)(9-4n^2)(13-4n^2))+8(9+136n^2+80n^4).\end{aligned}$$

Ist x grofs, so kann man die Seite rechts der Gleichung (31.) $=0$ setzen; dadurch erhält man, als Näherungswerthe der Wurzeln derselben, die Werthe, welche der Ausdruck

$$\tfrac{1}{4}\pi(n+2h)$$

annimmt, wenn für h ganze Zahlen gesetzt werden. Es folgt hieraus das oben ausgesprochene, von *Chladni* gefundene Gesetz, da die Schwingungszahlen der Töne den Quadraten der Wurzeln der Gleichung (31.) proportional sind. Diese Gleichung zeigt ferner, dafs die Proportionalität der Schwingungszahlen mit den Quadraten aufeinanderfolgender gerader oder ungerader Zahlen um so näher Statt finden wird, je höher die Töne sind; und sie liefert ein Mittel, auf eine bequeme Weise alle Töne, die zu einem Werthe von n gehören, mit Ausnahme der tiefsten, mit grofser Genauigkeit zu bestimmen. Was die Zahl h in dem Näherungswerthe von $l\lambda_{n\mu}$ anbetrifft, so zeigt die numerische Rechnung, dafs sie $=\mu$ ist; so dafs also für grofse Werthe von $\mu l\lambda_{n\mu}$ nahezu $=\frac{1}{4}\pi(n+2\mu)$ ist: ein Resultat, welches in vollkommner Übereinstimmung mit den Beobachtungen von *Chladni* ist.

Um die tiefsten Töne für einen Werth von n zu ermitteln, mufs man die kleinsten Wurzeln der Gleichung (21.) berechnen. Diese Gleichung kann man auf die Form

$$0=1-\frac{x^4}{A_1}+\frac{x^8}{A_2}-\frac{x^{12}}{A^3}+\text{etc.},$$

bringen, indem man sie für $n=0$ und $n=1$ durch x^4 dividirt. Die Rechnung giebt folgende Werthe von $\log A_1$, $\log A_2$, ...:

für $\theta = \frac{1}{2}$, also $\gamma = \frac{1}{3}$ (nach *Poisson*):

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\log A_1$	0,664 2079	1,348 0266	0,265 0703	0,973 3073
$\log A_2$	2,535 1132	3,588 0591	2,061 5798	3,105 2465
$\log A_3$	5,097 3650	6,406 5347	4,588 9514	5,868 2055
$\log A_4$	8,149 924	9,655 978	7,620 8431	9,083 199
$\log A_5$	11,583 4	13,249 6	11,040 582	12,653 148
$\log A_6$	15,33	17,130	14,776 04	16,516 13
$\log A_7$		21,3	18,778 0	20,629 0
$\log A_8$			23,01	24,96
$\log A_9$				29,48

für $\theta = 1$, also $\gamma = \frac{1}{2}$ (nach *Wertheim*):

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\log A_1$	0,681 2413	1,352 1826	0,224 2682	0,939 3022
$\log A_2$	2,556 3026	3,594 0911	2,018 9332	3,066 4444
$\log A_3$	5,120 4304	6,413 6351	4,546 2236	5,827 9058
$\log A_4$	8,174 058	9,663 768	7,578 3037	9,042 324
$\log A_5$	11,608 3	13,257 8	10,998 263	12,612 037
$\log A_6$	15,35	17,138	14,733 92	16,474 93
$\log A_7$		21,3	18,736	20,587 7
$\log A_8$			22,97	24,92
$\log A_8$				29,44

Hieraus gehen folgende Werthe von

$$\log(\lambda_{n\mu}\, l)^4$$

hervor:

für $\theta = \frac{1}{2}$:

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	0,278 37	1,006 51
1	0,693 67	1,415 53	1,891 17	2,246 93
2	1,963 08	2,348 29		

für $\theta = 1$:

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	0,236 38	0,970 14
1	0,711 68	1,420 12	1,889 97	2,242 98
2	1,967 12	2,350 22		

In der folgenden Tafel sind die Tonverhältnisse, welche *Chladni* gefunden hat, zusammengestellt mit denen, welche die Rechnung giebt. Es sind die

Töne angegeben, welche eine Scheibe geben kann, deren tiefster Ton *C* ist. In den mit *Ch.* überschriebenen Columnen finden sich die Töne, welche *Chladni* beobachtet hat, in den mit *P.* überschriebenen die, welche die Rechnung unter der Voraussetzung $\theta = \frac{1}{2}$, in den mit *W.* überschriebenen die, welche die Rechnung unter der Voraussetzung $\theta = 1$ geliefert hat. Die Angaben beziehen sich alle auf die gleichschwebende Temperatur *). Jeder berechnete Ton ist durch den ihm zunächst liegenden Ton der Scale bezeichnet, dem ein + oder — beigegfügt ist, je nachdem jener etwas höher oder tiefer als dieser war.

μ	$n = 0$			$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$		
	Ch.	*P.*	*W.*	*Ch.*	*P*	*W.*	*Ch.*	*P.*	*W.*	*Ch.*	*P.*	*W.*
0	—	—	—	—	—	—	*C*	*C*	*C*	*d*	*dis* —	*dis* —
1	*Gis*	*Gis* +	*A* +	*b*	*h* —	*c* —	$\overline{g}$	$\overline{gis}$ +	$\overline{a}$ —	$\overline{\overline{d}}.\overline{\overline{dis}}$	$\overline{\overline{dis}}$ +	$\overline{\overline{e}}$ —
2	$\overline{gis}$ +	$\overline{b}$ —	$\overline{b}$ +	$\overline{\overline{e}}$ +	$\overline{\overline{f}}$ +	$\overline{\overline{fis}}$ +						

Es zeigen sich hier nicht unerhebliche Abweichungen der beobachteten Töne von den durch die beiden Rechnungen ermittelten. Die beobachteten Töne stimmen mit den aus der *Poisson*'schen Annahme ($\theta = \frac{1}{2}$) ermittelten etwas besser überein, als mit den aus der *Wertheim*'schen Annahme ($\theta = 1$) berechneten; doch ist die Abweichung bei jenen zu grofs, als dafs hieraus ein Schlufs gegen diese Annahme gezogen werden könnte.

Ich wende mich jetzt zur Vergleichung einiger numerischen Resultate, welche die Theorie in Bezug auf die Knotenlinien giebt, mit den entsprechenden Resultaten der Beobachtung. Hr. Professor *Strehlke* hat die Güte gehabt, mir die Ergebnisse einiger Messungen von ausgezeichneter Genauigkeit mitzutheilen, die er an zwei kreisförmigen Glasscheiben angestellt hat. Diese Scheiben waren mit derselben Sorgfalt gearbeitet, wie die quadratischen Scheiben, an denen er die Messungen angestellt hat, die von ihm in *Dove's* Repertorium Bd. III. S. 113 bekannt gemacht sind; die eine von ihnen hatte ungefähr 6 Zoll Durchmesser und 1 Linie Dicke, die andere 7 Zoll Durchmesser und 1,1 Linie Dicke. Zum Beweise der Vollkommenheit der Scheiben und der Genauigkeit der Messungsmethode kann die Kleinheit der Unterschiede der folgenden Zahlen dienen, die durch Messung verschiedener Durchmesser des Knotenkreises ohne Knotendurchmesser auf einer Scheibe gefunden wurden.

---

*) *Chladni* sagt zwar nicht ausdrücklich in seiner Akustik, aus welcher seine Angaben genommen sind, dafs dieselben sich auf die gleichschwebende Temperatur beziehen; doch scheint es unzweifelhaft, dafs dem so ist.

	Erste Seite.	Kehrseite derselben Scheibe.
	$24^{L},415$	$24^{L},42$
	43	44
	44	425
	425	43
	405	415
Mittel	$24^{L},423$	$24^{L},426$

Eben so regelmäfsig als diese Scheibe, welche mit I bezeichnet werden mag, zeigte sich die andere 7zöllige, welche II genannt werden soll. Ich will die Werthe der Radien der Knotenkreise, welche diese beiden Scheiben ergeben haben, zusammenstellen mit den Werthen, welche die Rechnung bei der *Poisson*'schen oder der *Wertheim*'schen Annahme von θ giebt.

	Beobachtung		Rechnung	
	I	II	*P.*	*W.*
$n=0,\quad \mu=1$	$l.0,6792$	$l.0,6782$	$l.0,68062$	$l.0,67941$
$n=1,\quad \mu=1$	$l.0,7811$	$l.0,7802$	$l.0,78136$	$l.0,78088$

Den Radius des Knotenkreises, der dem Tone ($n=0$, $\mu=1$) entspricht, hat auch *Savart* gemessen; er fand bei drei verschiedenen Scheiben die folgenden Werthe:

$$l.0,6819, \quad l.0,6798, \quad l.0,6812.$$

Diese Angaben theilt *Poisson* bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Schwingungen einer kreisförmigen Platte in der oben citirten Abhandlung mit. *Poisson* hat dort für den Fall $n=0$ und unter der Annahme $\theta=\frac{1}{2}$ die tiefsten Töne und die zu diesen gehörigen Knotenkreise berechnet.

Die aus der *Wertheim*'schen Annahme abgeleiteten Resultate weichen von den aus der *Poisson*'schen abgeleiteten nur wenig ab; mit den *Strehlke*schen Beobachtungen stimmen jene noch besser überein, als diese. Wie mir scheint, spricht dieses aber nicht gegen die *Poisson*'sche Annahme, denn eine vollkommene Übereinstimmung zwischen der Theorie und dem Versuche darf man nicht erwarten, weil die dem Versuche unterworfenen Scheiben nicht die Eigenschaften in aller Strenge besitzen, welche in der Theorie ihnen beigelegt werden.

Hr. *Strehlke* hat, aufser den angeführten, mir noch die Resultate einiger anderen Messungen mitgetheilt, die von ihm an weniger vollkommenen Scheiben angestellt sind. Ich lasse dieselben folgen, zugleich mit den entsprechen-

den Zahlen, welche die Rechnung unter der Annahme $\theta = \frac{1}{2}$ und unter der Annahme $\theta = 1$ gegeben hat.

Radien der Knotenkreise.

	Beobachtung				Rechnung $\theta = \frac{1}{2}$	Rechnung $\theta = 1$
$n = 1,\ \mu = 1$	0,781	0,783	0,781	0,783	0,78136	0,78088
$n = 2,\ \mu = 1$	0,79	0,81	0,82		0,82194	0,82274
$n = 3,\ \mu = 1$	0,838	0,842			0,84523	0,84681
$n = 1,\ \mu = 2$	0,488	0,492			0,49774	0,49715
	0,869	0,869			0,87057	0,87015

Der Radius der Scheibe ist hierbei $= 1$ gesetzt.

Im Januar 1850.

5.

Ein Beitrag zur Zahlentheorie.

(Von Herrn *A. Thacker* zu Cambridge.)

Der Zweck dieses Aufsatzes ist, einen Ausdruck zu finden für die Summe der $n$ten Potenzen der Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und zu derselben relative Primzahlen sind. n ist eine positive ganze Zahl.

Es sei die gegebene Zahl z von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo $a, b, c, \ldots$ Primfactoren sind. Man setze

$$\varphi(z) = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + z^n.$$

Dann beruht das Verfahren auf folgender Betrachtung.

Wenn man von der oben hingeschriebenen Reihe die Summe der Glieder abzieht, welche durch a theilbar sind und von dem Reste die Summe der darin befindlichen durch b theilbaren Glieder, und so fort, bis die Zahl der Primfactoren erschöpft ist: so sind die Glieder, welche im letzten Reste vorkommen, alle zu z theilerfremd. Folglich, um die Aufgabe zu lösen, kommt es darauf an, den Werth dieses letzten Restes zu finden.

Zu dem Ende bemerke man zuerst, dafs die sämmtlichen durch a theilbaren Zahlen von 1 bis z in der Reihe

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ \frac{z}{a}\cdot a$$

enthalten sind; die Summe ihrer $n$ten Potenzen ist

$$= a^n + (2a)^n + (3a)^n + \ldots + \left(\frac{z}{a}\cdot a\right)^n = a^n \left\{1^n + 2^n + 3^n + \ldots + \left(\frac{z}{a}\right)^n\right\},$$

$$\text{also} \quad = a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right).$$

Zieht man dies von $\varphi(z)$ ab und bezeichnet den Rest durch R, so ist

$$R = \varphi(z) - a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right).$$

Unserer Verfahrungs-Art gemäfs mufs jetzt von R die Summe der Glieder, welche durch b theilbar sind, abgezogen werden. Es besteht R aus zwei Theilen, $\varphi(z)$ und $a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right)$, deren jeder durch b theilbare Glieder enthält.

Man sieht leicht, dafs die Summe derjenigen, welche in $\varphi(z)$ vorkommen,

$$= b^n + (2b)^n + (3b)^n + \dots + \left(\frac{z}{b}\cdot b\right)^n,$$

also

$$= b^n \varphi\left(\frac{z}{b}\right)$$

ist. Dagegen in $a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right)$ ist die Summe

$$= a^n \left\{b^n + (2b)^n + (3b)^n + \dots + \left(\frac{z}{ab}\cdot b\right)^n\right\}$$

oder

$$= a^n b^n \varphi\left(\frac{z}{ab}\right).$$

Die ganze Summe in $\varphi(z) - a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right)$ ist also

$$= b^n \varphi\left(\frac{z}{b}\right) - a^n b^n \varphi\left(\frac{z}{ab}\right).$$

Subtrahirt man dieselbe von R und nennt den Rest R', so erhält man

$$R' = \varphi(z) - a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right) - b^n \varphi\left(\frac{z}{b}\right) + a^n b^n \varphi\left(\frac{z}{ab}\right).$$

Auf dieselbe Weise ist offenbar die Summe der in R' befindlichen, durch c theilbaren Glieder,

$$= c^n \varphi\left(\frac{z}{c}\right) - a^n c^n \varphi\left(\frac{z}{ac}\right) - b^n c^n \varphi\left(\frac{z}{bc}\right) + a^n b^n c^n \varphi\left(\frac{z}{abc}\right)$$

und wenn man dies von R' abzieht und den Rest durch R'' bezeichnet, so ergiebt sich

$$R'' = \varphi(z) - a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right) - b^n \varphi\left(\frac{z}{b}\right) - c^n \varphi\left(\frac{z}{c}\right)$$
$$+ b^n c^n \varphi\left(\frac{z}{bc}\right) + a^n c^n \varphi\left(\frac{z}{ac}\right) + a^n b^n \varphi\left(\frac{z}{ab}\right) - a^n b^n c^n \varphi\left(\frac{z}{abc}\right).$$

Das Gesetz dieses Ausdrucks fällt in die Augen und kann ohne Schwierigkeit verallgemeinert werden. Allein der Kürze wegen wollen wir uns auf den Fall beschränken, wo z nur drei von einander verschiedene Primfactoren enthält. Alsdann ist R'' die Summe, die gesucht wird, und wenn man dieselbe durch S_n bezeichnet, ergiebt sich

$$S_n = \varphi(z) - a^n \varphi\left(\frac{z}{a}\right) - b^n \varphi\left(\frac{z}{b}\right) - c^n \varphi\left(\frac{z}{c}\right)$$
$$+ b^n c^n \varphi\left(\frac{z}{bc}\right) + a^n c^n \varphi\left(\frac{z}{ac}\right) + a^n b^n \varphi\left(\frac{z}{ab}\right) - a^n b^n c^n \varphi\left(\frac{z}{abc}\right).$$

Nun läfst sich aber nach einem bekannten Lehrsatze die Summe der $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis r durch

$$\varphi(r) = \frac{r^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2}r^n + \tfrac{1}{2}n_1 B_1 r^{n-1} - \tfrac{1}{4}n_3 B_3 r^{n-3} + \tfrac{1}{6}n_5 B_5 r^{n-5} - \text{etc.}$$

ausdrücken, wo n_1, n_3, ... die Binomialcoëfficienten, und B_1, B_3, ... die *Bernoulli*schen Zahlen sind *).

Wenn man hiernach statt $\varphi(z)$, $\varphi\left(\frac{z}{a}\right)$, ... ihre Entwickelungen setzt und das Resultat nach Potenzen von z ordnet, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
S_n = & \frac{z^{n+1}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{abc}\right) \\
& + \tfrac{1}{2}z^n(1-1-1-1+1+1+1-1) \\
& + \tfrac{1}{2}n_1 B_1 z^{n-1}(1-a-b-c+bc+ac+ab-abc) \\
& - \tfrac{1}{4}n_3 B_3 z^{n-3}(1-a^3-b^3-c^3+b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3-a^3b^3c^3) \\
& + \tfrac{1}{6}n_5 B_5 z^{n-5}(1-a^5-b^5-c^5+b^5c^5+a^5c^5+a^5b^5-a^5b^5c^5) \\
& - \text{etc.} \\
= & \frac{z^{n-1}}{n+1}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) + \tfrac{1}{2}n_1 B_1 z^{n-1}(1-a)(1-b)(1-c) \\
& \qquad - \tfrac{1}{4}n_3 B_3 z^{n-3}(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3) \\
& \qquad + \tfrac{1}{6}n_5 B_5 z^{n-5}(1-a^5)(1-b^5)(1-c^5) \\
& \qquad - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Glieder ist $\frac{1}{2}(n+2)$, oder $\frac{1}{2}(n+1)$; dabei das letzte Glied

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+2)}.\frac{1}{n}.n_{n-1}B_{n-1}z(1-a^{n-1})(1-b^{n-1})(1-c^{n-1}),$$

oder

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}.\frac{1}{n-1}.n_{n-2}B_{n-2}z^2(1-a^{n-2})(1-b^{n-2})(1-c^{n-2}),$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Somit ist die Aufgabe vollständig gelöset. Es sind nur noch einige besondere Fälle zu betrachten.

1. Man setze $n=0$. Dann erhält man den bekannten, von *Euler*, *Gaufs* u. A. bewiesenen Ausdruck $S_0 = z\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$ für die *Anzahl* der Zahlen, welche kleiner als z und zu derselben relative Primzahlen sind.

*) Man sehe in diesem Journal Bd. 31. S. 249. Am einfachsten ist das Theorem in *Cauchy's* „Résumés analytiques" bewiesen.

2. Es sei $n=1$. Dann ist $S_1=\frac{1}{2}z^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$; was mit einem von *Crelle* in diesem Journal (Bd. 29. S. 80) gegebenen Ausdrucke übereinstimmt.

3. Wenn $n=2$ ist, erhält man, weil $B_1=\frac{1}{6}$ ist,

$$S_2 = \tfrac{1}{3}z^3\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)+\tfrac{1}{6}z(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$= \tfrac{1}{3}z\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)(z^2-\tfrac{1}{2}abc).$$

4. Es sei schliefslich $n=3$. Alsdann ergiebt sich

$$S_3 = \tfrac{1}{4}z^4\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)+\tfrac{1}{4}z^2(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$= \tfrac{1}{4}z^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)(z^2-abc).$$

Es sei z. B. $z=60=2^2.3.5$, so ist

$S_0=16,\quad S_1=480,\quad S_2=19120,\quad S_3=856800,$ u. s. w.

Frankfurt am Main im September 1848.

Crelle: Journal d. Math. Bd. 40. Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift von Süsmilch.

Monsieur,

Je ne manquerois pas de Vous communiquer les principaux moments de la vie de feu Mr. Lieberkühn: mais le nombre des eloges ne sera t-il pas trop grand et ne seroit il pas mieux de differer celui jusqu'a l'assemblée generale du printems? je viendrais a l'academie le prochain jeudi pour le deliberer. En tout cas je Vous promet de Vous communiquer les circonstances vers la fin de cette semaine. je suis avec le plus parfaite consideration

Monsieur

Votre tres humble et
tres obeiss. serv.
Süssmilch.

le 10 Janv.
1757.

6.

Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter Classen für die aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und die idealen Factoren derselben.

(Von Herrn *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

Die gegenwärtige Untersuchung über die Anzahl der Classen der aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und der idealen Factoren derselben wird sich genau an meine früher über diese Art der complexen Zahlen veröffentlichten Arbeiten anschliefsen, namentlich an die Abhandlung No. 16. im 35ten Bande dieses Journals, in welcher ich die idealen complexen Zahlen zuerst eingeführt und genau definirt, auch den Begriff der Äquivalenz für dieselben bestimmt, sie hiernach in Classen getheilt und bewiesen habe, dafs für jede Primzahl λ nur eine endliche bestimmte Anzahl nicht äquivalenter Classen existirt. Die genaue Bestimmung dieser Classen-Anzahl aber habe ich daselbst nicht versucht, weil mir bekannt war, dafs *Lejeune-Dirichlet* diese Arbeit, wenn gleich nicht für die idealen complexen Zahlen, so doch für eine bestimmte Art von homogenen Formen $\lambda-1^{\text{ten}}$ Grades mit $\lambda-1$ unbestimmten Zahlen, welche (nur in der Anschauungsweise von diesen verschieden) wesentlich mit ihnen übereinstimmen, schon seit einiger Zeit ausgeführt hatte. Als ich mich nun aber mit der Anwendung der Theorie der complexen Zahlen auf den allgemeinen Beweis des *Fermat*'schen Satzes, dafs die Gleichung $x^n+y^n=z^n$, wenn $n>2$, durch ganze Zahlen nicht aufzulösen ist, beschäftigte, war mir die Bestimmung dieser Anzahl der Classen nicht äquivalenter idealer complexer Zahlen dazu unentbehrlich und ich entschlofs mich, die Arbeit, welche bei Zugrundelegung der von *Dirichlet* für die Bestimmung der zu einer gegebenen Determinante gehörenden Classen nicht äquivalenter quadratischer Formen gefundenen Principien, auf dem Standpuncte, zu welchem ich die Theorie der complexen idealen Zahlen in der Abhandlung No. 16. 35ten Bandes dieses Journals bereits gebracht hatte, keine principiellen Schwierigkeiten mehr bot, selbst auszuführen. Das Resultat, insoweit ich es zur Ergründung des oben angegebenen *Fermat*'schen Satzes brauchte, habe ich

in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom September 1847 veröffentlicht, aber erst jetzt, nachdem ich von *Dirichlet,* dem die Priorität hier zugehört, selbst aufgefordert worden bin, will ich in der gegenwärtigen Abhandlung auch die Methode auseinandersetzen, welche mich zu diesem Resultate geführt hat. Hierauf werde ich sodann in einer zweiten Abhandlung, als weitere Vorarbeit für meinen Beweis jenes *Fermat*'schen Satzes, die besondere Untersuchung über die Theilbarkeit dieser Classenzahl durch λ und über gewisse complexe Einheiten, welche ich in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom September 1847 kurz entwickelt habe, in etwas veränderter Fassung reproduciren, und endlich, eben so in einer dritten Abhandlung, den auf diese sich stützenden Beweis des *Fermat*'schen Satzes, dessen Grundzüge ich zuerst in einem Briefe an *Lejeune-Dirichlet* mitgetheilt habe, welcher in dem Aprilhefte der Monatsberichte der Berliner Akademie des Jahres 1847 abgedruckt ist.

Es bezeichne q_d eine für den Modul λ zum Exponenten d, einem Divisor von $\lambda-1$, gehörende Primzahl; welche also der Bedingung genügt, dafs $q_d^d \equiv 1 \bmod. \lambda$, dafs aber keine niedrigere Potenz von q_d als die d^{te} der Einheit congruent sei, für den Modul λ. Die Primzahl q_d hat unter dieser Voraussetzung allemal genau $\frac{\lambda-1}{d} = \delta$ complexe Primfactoren, welche wirklich, oder ideal sein können; wie es in der Abhandlung No. 16. 35ten Bandes dieses Journals gezeigt worden ist. Eben so sei $q'_{d'}$ eine für den Modul λ zum Exponenten d' gehörende Primzahl, welche darum $\frac{\lambda-1}{d'} = \delta'$ (ideale) complexe Primfactoren enthält, u. s. w. Es stelle ferner $F(\alpha)$, wo $\alpha^\lambda = 1$ ist, irgend eine beliebige ideale oder wirkliche complexe Zahl vor, so hat die Norm derselben $NF(\alpha)$ stets die Form $\lambda^n . q_d^{md} . q'^{m'd'}_{d'} . q''^{m''d''}_{d''} \ldots$, in welcher $q, q', q'', \ldots$ $d, d', d'', \ldots$ die angegebenen Bedeutungen haben und $n, m, m', m'', \ldots$ beliebige, nicht negative ganze Zahlen sind.

Es sei nun

$$1. \quad R = \Sigma \frac{s-1}{(NF(\alpha))^s},$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf alle *verschiedene* complexe, ideale und wirkliche Zahlen $F(\alpha)$ bezieht, und wo als verschieden diejenigen gelten, welche verschiedene Primfactoren enthalten, nicht aber diejenigen, welche,

dieselben idealen Primfactoren enthaltend, nur mit verschiedenen complexen Einheiten multiplicirt sind. Die unbestimmte Zahl s wird gröfser als Eins angenommen und später der Grenzwerth der Reihe R für $s = 1$ untersucht werden. Alle einzelnen Glieder der Reihe R sind nun von der Form

$$2. \qquad \frac{s-1}{(\lambda^n \cdot q_d^{md} \cdot q_{d'}'^{m'd'} \cdot q_{d''}''^{m''d''} \ldots)^s}$$

und es ist zunächst die Frage zu erörtern: wievielmal ein bestimmtes solches Glied in der Reihe R vorkomme, d. i., wieviele verschiedene ideale oder wirkliche complexe Zahlen $F(\alpha)$ es gebe, deren Norm gleich $\lambda^n . q_d^{md} . q_{d'}'^{m'd'} \ldots$ ist. Dies geschieht sehr einfach auf folgende Weise. Erstens: da die Norm den Factor q_d^{md} enthält, so mufs die complexe Zahl $F(\alpha)$ von den δ idealen Factoren des q_d genau m enthalten, welche entweder verschieden, oder zum Theil, oder alle gleich sein können. Von vorhandenen δ Elementen lassen sich aber m, wenn Wiederholungen gestattet sind, auf

$$\frac{\delta(\delta+1)(\delta+2) \ldots (\delta+m-1)}{1.2.3 \ldots m}.$$

verschiedene Arten nehmen. Auf eben so viele verschiedene Arten kann also der Factor der Norm q_d^{md} entstehen. Eben so ergiebt sich, dafs der Factor der Norm $q_{d'}'^{m'd'}$ auf

$$\frac{\delta'(\delta'+1) \ldots (\delta'+m'-1)}{1.2 \ldots m'}$$

verschiedene Arten entstehen kann u. s. f. Der besondere Factor der Norm λ^n aber kann nur auf eine einzige Weise entstehen, nämlich, wenn $F(\alpha)$ von den complexen Primfactoren des λ, welche alle einander gleich sind und durch $1-\alpha$ dargestellt werden, genau n enthält. Hieraus folgt, wenn

$$3. \qquad NF(\alpha) = \lambda^n . q_d^{md} . q_{d'}'^{m'd'} . q_{d''}''^{m''d''} \ldots .$$

ist, dafs es genau

$$\frac{\delta(\delta+1) \ldots (\delta+m-1)}{1.2 \ldots m} \cdot \frac{\delta'(\delta'+1) \ldots (\delta'+m'-1)}{1.2 \ldots m'} \cdot \frac{\delta''(\delta''+1) \ldots (\delta''+m''-1)}{1.2 \ldots m''} \ldots .$$

verschiedene complexe Zahlen $F(\alpha)$ giebt, welche diese bestimmte Norm haben. Es läfst sich also die Reihe R jetzt in folgende Form setzen:

$$4. \qquad R = (s-1)\Sigma \frac{\dfrac{\delta(\delta+1) \ldots (\delta+m-1)}{1.2 \ldots m} \cdot \dfrac{\delta'(\delta'+1) \ldots (\delta'+m'-1)}{1.2 \ldots m'} \ldots}{\lambda^{ns} \cdot q_d^{mds} \cdot q_{d'}'^{m'd's} \ldots},$$

wo das Summenzeichen sich auf alle verschiedenen Primzahlen $q, q', \ldots,$

mit deren jeder auch d und δ, d' und δ' u. s. w. gegeben ist, und auf alle nicht negativen ganzzahligen Werthe von n, m, m' u. s. w. bezieht. Dieser Reihe sieht man auf den ersten Blick an, dafs sie das Product folgender Binomialreihen ist:

$$1+\frac{1}{\lambda^s}+\frac{1}{\lambda^{2s}}+\frac{1}{\lambda^{3s}}+\dots.$$

$$1+\frac{\delta}{1}\cdot\frac{1}{q_d^{ds}}+\frac{\delta(\delta+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{q_d^{2ds}}+\dots;$$

$$1+\frac{\delta'}{1}\cdot\frac{1}{q_{d'}^{d's}}+\frac{\delta'(\delta'+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{q_{d'}^{2d's}}+\dots.$$

u. s. w.

Summirt man diese einzelnen Binomialreihen, so erhält man R folgendermafsen in Form eines Products dargestellt:

$$5.\qquad R=\frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^s}}\cdot\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_d^{ds}}}\right)^{\delta}\cdot\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_{d'}^{d's}}}\right)^{\delta'}\dots;$$

wo das erste Productzeichen sich auf alle verschiedenen Primzahlen q_d bezieht, welche zum Exponenten d gehören, für den Modul λ; das zweite auf alle zum Exponenten d' gehörenden Primzahlen $q'_{d'}$ u. s. f., und wo genau so viele besondere Producte vorkommen, als $\lambda-1$ verschiedene Divisoren hat, nämlich d, d', u. s. w. Es sei nun β eine primitive Wurzel der Gleichung $\beta^{\lambda-1}=1$ und r irgend eine Zahl, welche mit $\lambda-1$ den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler δ hat, so ist:

$$\left(1-\frac{1}{q_d^{ds}}\right)^{\delta}=\left(1-\frac{1}{q_d^s}\right)\left(1-\frac{\beta^r}{q_d^s}\right)\left(1-\frac{\beta^{2r}}{q_d^s}\right)\dots\left(1-\frac{\beta^{(\lambda-2)r}}{q_d^s}\right),$$

also

$$6.\qquad \Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_d^{ds}}}\right)^{\delta}=\Pi\overset{\lambda-2}{\underset{0}{\Pi_k}}\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{kr}}{q_d^s}}\right).$$

Ich gebe nun dem r den Werth Ind. q_d (mod. λ), da Ind. (q_d) und $\lambda-1$ den gröfsten gemeinschaftlichen Factor δ haben; wie es sein soll. Dafs dies wirklich der Fall ist, wird kurz so gezeigt: Setzt man $q_d\equiv g^h$, mod. λ, wo g eine primitive Wurzel von λ bedeutet, so ist $d.h$ durch $\lambda-1$ theilbar; aber kein niedrigeres Vielfache von h, als das $d$fache, ist durch $\lambda-1$ theilbar, und da $\lambda-1=d.\delta$ ist, so haben $h=$ Ind. q_d und $\lambda-1$ den gemeinschaftlichen

Factor δ; aber keinen gröfseren. Werden nun der in Gleichung (6.) gefundene Ausdruck, in welchem $r \equiv \text{Ind.}\, q_d$, mod. λ, ist, und eben so die entsprechenden Ausdrücke für die andern Producte in der Gleichung (5.) substituirt, so nimmt dieselbe, wie leicht zu sehen ist, folgende einfache Gestalt an:

$$7. \quad R = \frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^s}} \overset{\lambda-2}{\underset{0}{\Pi_k}} \Pi \frac{1}{1-\frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s}},$$

wo die Primzahlen q nicht weiter nach den Exponenten zu unterscheiden sind, zu denen sie gehören, für den Modul λ, und das zweite Productzeichen Π sich auf alle Primzahlen q ohne Unterschied bezieht, mit alleiniger Ausnahme der Primzahl λ; denn alle zu den einzelnen Exponenten d, d', d'' u. s. w. gehörenden Primzahlen q_d, $q'_{d'}$, $q''_{d''}$ u. s. w. machen zusammengenommen alle Primzahlen aufser λ aus. Macht man jetzt von der Reihen-Entwicklung

$$\frac{1}{1-\frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s}} = 1 + \frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s} + \frac{\beta^{2k\,\text{Ind.}\,q}}{q^{2s}} + \frac{\beta^{3k\,\text{Ind.}\,q}}{q^{3s}} + \dots$$

Gebrauch und stellt sich alle die unendlich vielen, den verschiedenen Werthen des q entsprechenden, in dieser Form enthaltenen Reihen mit einander multiplicirt vor, wobei man von den bekannten Formeln $\text{Ind.}\,q + \text{Ind.}\,q' \equiv \text{Ind.}\,qq'$, mod. $\lambda-1$, und $n.\text{Ind.}\,q \equiv \text{Ind.}\,q^n$, mod. $\lambda-1$, Gebrauch macht, so übersieht man sehr leicht, dafs

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s}} = \Sigma \frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,n}}{n^s}$$

ist; wo das Summenzeichen Σ sich auf alle ganzzahligen positiven Werthe des n bezieht; mit Ausschlufs der durch λ theilbaren. Demnach hat man

$$8. \quad R = \frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^s}} \Sigma \frac{1}{n^s} . \Sigma \frac{\beta^{\text{Ind.}\,n}}{n^s} . \Sigma \frac{\beta^{2\,\text{Ind.}\,n}}{n^s} \dots . \Sigma \frac{\beta^{(\lambda-2)\,\text{Ind.}\,n}}{n^s}.$$

Läfst man nun das s abnehmend sich der Grenze Eins unendlich nähern, so erhält man bekanntlich

$$(s-1)\Sigma \frac{1}{n^s} = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad \text{für } s=1,$$

und die übrigen in dem Ausdrucke (8.) enthaltenen unendlichen Reihen sind

bekanntlich für $s=1$ convergent und haben endliche bestimmte Werthe. Deshalb wird

$$9.\quad R = \Sigma\frac{\beta^{\text{Ind.}n}}{n}.\Sigma\frac{\beta^{2\,\text{Ind.}n}}{n}\ldots\Sigma\frac{\beta^{(\lambda-2)\,\text{Ind.}n}}{n},\quad \text{für } s=1.$$

Die einzelnen unendlichen Reihen, welche als Factoren dieses Products auftreten, lassen sich durch endliche Ausdrücke summiren, und da diese Summen, welche wesentlich verschieden sind, je nachdem k ungerade oder gerade ist, von *Dirichlet* in der Abhandlung über die arithmetische Reihe gefunden worden sind, so beschränken wir uns hier darauf, nur die Resultate mitzutheilen, welche wir in folgende Form setzen:

$$\Sigma\frac{\beta^{-(2r-1)\,\text{Ind.}n}}{n} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\lambda(\beta^{2r-1},\alpha)}(1+g_1\beta^{2r-1}+g_2\beta^{2(2r-1)}+\ldots+g_{\lambda-2}\beta^{(\lambda-2)(2r-1)}),$$

wo $g_1, g_2, g_3, \ldots g_{\lambda-2}$ die kleinsten positiven Reste bezeichnen, welche die Potenzen einer primitiven Wurzel $g, g^2, g^3, \ldots g^{\lambda-2}$ geben, für den Modul λ, und wo (β^{2r-1},α) den in der Kreistheilung bekannten Ausdruck

$$(\beta^{2r-1},\alpha) = \alpha+\beta^{2r-1}.\alpha^{g}+\beta^{2(2r-1)}.\alpha^{g^2}+\ldots+\beta^{(\lambda-2)(2r-1)}.\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

bezeichnet. Ferner

$$\Sigma\frac{\beta^{-2r\,\text{Ind.}n}}{n} = \frac{2(l.e(\alpha)+\beta^{2r}l.e(\alpha^{g})+\beta^{4r}l.e(\alpha^{g^2})+\ldots+\beta^{(\lambda-3)r}l.e(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}}))}{(1-\beta^{-2r})(\beta^{2r},\alpha)},$$

wo $e(\alpha)$ eine bestimmte complexe Einheit bezeichnet, nämlich

$$e(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^{g})(1-\alpha^{-g})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}\right)}$$

und

$$(\beta^{2r},\alpha) = \alpha+\beta^{2r}.\alpha^{g}+\beta^{4r}.\alpha^{g^2}+\ldots+\beta^{(\lambda-2)2r}.\alpha^{g^{\lambda-2}}.$$

Substituirt man nun diese Summen in dem Ausdrucke (9.) der Reihe R, wobei man der Kürze wegen das Product

$$\overset{\frac{1}{2}(\lambda-1)}{\underset{1}{\Pi_r}}(1+g_1.\beta^{2r-1}+g_2.\beta^{2(2r-1)}+\ldots+g_{\lambda-2}.\beta^{(\lambda-2)(2r-1)}) = P$$

und das Product

$$\overset{\frac{1}{2}(\lambda-3)}{\underset{1}{\Pi_r}}(le(\alpha)+\beta^{2r}.le(\alpha^{g})+\ldots+\beta^{(\lambda-3)r}.le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}})) = Q$$

setzt und bemerkt, dafs $(\beta^k,\alpha)(\beta^{-k},\alpha)=\pm\lambda$, $(-1,\alpha)=\pm\sqrt{\pm\lambda}$ und

$$(1-\beta^{-2})(1-\beta^{-4})\ldots(1-\beta^{-(\lambda-3)}) = \tfrac{1}{2}(\lambda-1),$$

so hat man

$$10.\quad R = \frac{\pm\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.2^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.P.Q}{(\lambda-1).\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}},\quad \text{für } s=1.$$

Das Product Q läfst noch eine Vereinfachung zu. Nennt man nämlich D die Determinante des Systems folgender $\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} le(\alpha), & le(\alpha^{g}), & \dots\dots & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-5)}}), \\ le(\alpha^{g}), & le(\alpha^{g^2}), & \dots\dots & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-5)}}), & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}}), & \dots\dots & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-5)}}), \end{array}$$

so zeigt sich sehr leicht, dafs $Q = \frac{1}{2}(\lambda-1).D$ ist, dafs also R für $s=1$ auch so dargestellt werden kann:

$$11. \quad R = \frac{\pm \pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} 2^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}.P.D}{\lambda^{\lambda-\frac{1}{2}}}, \quad \text{für } s=1.$$

Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Theile unserer Untersuchung, nämlich zu der Summation derselben Reihe R nach einem andern Principe.

Stellt man sich in der Reihe

$$R = \Sigma \frac{s-1}{(NF(\alpha))^s},$$

wo $F(\alpha)$ alle idealen und wirklichen complexen Zahlen umfafst, diese alle in die nicht äquivalenten Classen abgetheilt vor, so dafs die erste Classe, welche alle ***wirklichen*** complexen Zahlen enthält, durch $f(\alpha)$, die zweite durch $f_1(\alpha)$, die dritte durch $f_2(\alpha)$ u. s. w. bezeichnet wird, so hat man, wenn die Anzahl aller nicht äquivalenten Classen, mit deren Auffindung sich diese ganze Abhandlung beschäftigt, durch H bezeichnet wird:

$$12. \quad R = \Sigma \frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s} + \Sigma \frac{s-1}{(Nf_1(\alpha))^s} + \dots + \Sigma \frac{s-1}{(Nf_{H-1}(\alpha))^s}.$$

Es ist nun für jede einzelne dieser Summen die Grenze zu suchen, welche sie für $s=1$ erreicht. Dieser Grenzwerth wird aber, wie wir später beweisen werden, für alle verschiedene Classen, d. h. für alle diese verschiedenen Summen, genau derselbe, und soll darum nur für die erste Summe, welche die erste Classe der complexen Zahlen, also alle ***wirklichen*** complexen Zahlen umfafst, hier vollständig bestimmt werden.

Alle wirklichen complexen Zahlen sind in der Form

$$13. \quad f(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^{g} + x_2\alpha^{g^2} + \dots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

enthalten, in welcher $x, x_1, x_2, \dots x_{\lambda-2}$ beliebige ganze Zahlen sind. Da aber, vermöge der Einheiten, mit welchen sie multiplicirt vorkommen, jede derselben auf unendlich viele verschiedene Arten durch diese Form dargestellt

wird, so suchen wir zunächst die Bedingungen, welchen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ unterworfen werden müssen, damit jede complexe Zahl nur ein einzigesmal durch diese Form dargestellt werde. Zu diesem Zwecke gebrauchen wir ein System von Fundamental-Einheiten, durch deren Potenz-Erhebung und Multiplication mit einander, wenn noch die einfache Einheit $\pm\alpha^m$ als Factor hinzugefügt wird, alle complexen Einheiten erzeugt werden. Diejenigen unserer geehrten Leser, welche mit der Theorie der complexen Einheiten noch nicht vertraut sein sollten, bitten wir, hierüber einen Aufsatz von *Dirichlet* in den Monats-Berichten der Berliner Akademie, vom März des Jahres 1846, nachzusehen. Es sei $\varepsilon_1(\alpha), \varepsilon_2(\alpha), \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ ein solches System von Fundamental-Einheiten, und es sei hier, wie auch in dem Folgenden, μ ein abgekürztes Zeichen für $\frac{1}{2}(\lambda-1)$, so umfafst die Form

$$14. \quad \pm\alpha^m . \varepsilon_1(\alpha)^{m_1} . \varepsilon_2(\alpha)^{m_2} \ldots . \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} . \varphi(\alpha) = f(\alpha)$$

alle möglichen Darstellungen einer und derselben complexen Zahl $f(\alpha)$, wenn den Potenz-Exponenten $m, m_1, m_2, \ldots m_{\mu-1}$ alle möglichen ganzzahligen Werthe gegeben werden. Wir abstrahiren jetzt von dem Factor $\pm\alpha^m$, welcher für sich bewirkt, dafs jede complexe Zahl auf 2λ verschiedene Arten dargestellt wird, und bemerken, dafs $\varepsilon_1(\alpha), \varepsilon_2(\alpha), \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ lauter reale Gröfsen sind, welche auch immer positiv angenommen werden können und sollen: $f(\alpha)$ aber und $\varphi(\alpha)$ können imaginair sein. Wenn nun nur die realen Theile dieser complexen Zahlen in Betracht gezogen werden, welche gleich $\sqrt{(f(\alpha)f(\alpha^{-1}))}$ und $\sqrt{(\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}))}$ sind, so giebt die Gleichung (14.), nachdem von dem Factor $\pm\alpha^m$ abstrahirt worden, wenn auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen genommen werden:

$$m_1 l\varepsilon_1(\alpha) + m_2 l\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + m_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha) + \tfrac{1}{2} l(r\varphi\alpha\varphi\alpha^{-1}) = \tfrac{1}{2} l(rf\alpha f\alpha^{-1}),$$

wo r eine ganz beliebige Gröfse ist, die wir hier hinzugefügt haben, um sie später zweckmäfsig zu benutzen. Verwandelt man noch α in $\alpha^g, \alpha^{g^2}, \ldots \alpha^{g^{\mu-2}}$, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$15. \quad \begin{cases} m_1 l\varepsilon_1(\alpha) + m_2 l\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + m_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha) + \tfrac{1}{2} l(r\varphi\alpha\varphi\alpha^{-1}) \\ \qquad = \tfrac{1}{2} l(rf\alpha f\alpha^{-1}), \\ m_1 l\varepsilon_1(\alpha^g) + m_2 l\varepsilon_2(\alpha^g) + \ldots + m_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g) + \tfrac{1}{2} l(r\varphi\alpha^g\varphi\alpha^{-g}) \\ \qquad = \tfrac{1}{2} l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}}) + m_2 l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}}) + \ldots + m_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}}) + \tfrac{1}{2} l(r\varphi\alpha^{g^{\mu-2}}\varphi\alpha^{-g^{\mu-2}}) \\ \qquad = \tfrac{1}{2} l(rf\alpha^{g^{\mu-2}} f\alpha^{-g^{\mu-2}}). \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen, in welchen $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ als Unbekannte angesehen werden sollen, möge ergeben:

$$16.\quad m_k = \frac{\overset{1}{A_k}l(rf\alpha f\alpha^{-1}) + \overset{2}{A_k}l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}) + \dots + \overset{\mu-1}{A_k}l(rf\alpha^{g^{\mu-2}}f\alpha^{-g^{\mu-2}})}{2\Delta}$$
$$- \frac{\overset{1}{A_k}l(r\varphi\alpha\varphi\alpha^{-1}) + \overset{2}{A_k}l(r\varphi\alpha^g\varphi\alpha^{-g}) + \dots + \overset{\mu-1}{A_k}l(r\varphi\alpha^{g^{\mu-2}}\varphi\alpha^{-g^{\mu-2}})}{2\Delta},$$

für $k = 1, 2, 3, \dots \mu-1$. Unterwirft man jetzt die Gröfsen $f\alpha . f\alpha^{-1}$, $f\alpha^g . f\alpha^{-g}$, ... $f\alpha^{g^{\mu-2}} . f\alpha^{-g^{\mu-2}}$, oder die in ihnen enthaltenen Coëfficienten $x, x_1, \dots x_{\lambda-2}$ den $\mu-1$ Bedingungen, dafs die Ausdrücke

$$17.\quad z_k = \frac{\overset{1}{A_k}l(rf\alpha f\alpha^{-1}) + \overset{2}{A_k}l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}) + \dots + \overset{\mu-1}{A_k}l(rf\alpha^{g^{\mu-2}}f\alpha^{-g^{\mu-2}})}{2\Delta}$$

für $k = 1, 2, 3, \dots \mu-1$ alle in den Grenzen 0 und 1 liegen sollen, so giebt es, wie leicht zu sehen, für jede gegebene complexe Zahl $\varphi(\alpha)$ nur ein einziges System von ganzzahligen Werthen der $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$, welche diesen Bedingungen und zugleich den in (16.) enthaltenen Gleichungen genügen: also die Einheit, mit welcher eine complexe Zahl behaftet ist, wenn sie diesen $\mu-1$ Bedingungen genügen soll, ist, mit alleiniger Ausnahme des Factors $\pm\alpha^m$, vollständig bestimmt, und da dieser für sich genau 2λ verschiedene Werthe hat, so schliefsen wir, wenn die Bedingungen, dafs $z_1, z_2, \dots z_{\mu-1}$ alle in den Grenzen 0 und 1 liegen, erfüllt sind, dafs jede gegebene complexe Zahl $f(\alpha)$ genau 2λ verschiedene Darstellungen durch die Form

$$f(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^g + \dots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

zuläfst. Kehrt man nun das System von Gleichungen, welches in der Form (17.) enthalten ist, wieder um, so lassen sich die $\mu-1$ Bedingungen auch so darstellen:

$$18.\quad \begin{cases} l\varepsilon_1(\alpha)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha)z_2 + \dots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)z_{\mu-1} = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha f\alpha^{-1}) \\ l\varepsilon_1(\alpha^g)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^g)z_2 + \dots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)z_{\mu-1} = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}})z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})z_2 + \dots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})z_{\mu-1} = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha^{g^{\mu-2}}f\alpha^{-g^{\mu-2}}), \end{cases}$$

und wenn man den Gröfsen $x, x_1, \dots x_{\lambda-2}$ in der complexen Zahl $f(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^g + \dots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ giebt, welche mit diesen Bedingungen verträglich sind, so erhält man alle verschiedenen *wirklichen* complexen Zahlen, jede genau 2λ mal.

Der Grenzwerth der Summe

$$\Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}, \quad \text{für } s = 1,$$

ist nun nach den Principien, welche *Dirichlet* in seiner berühmten Abhandlung über die arithmetische Reihe entwickelt hat, gleich der Anzahl der Glieder dieser Reihe, für welche $Nf(\alpha) < T$ ist, dividirt durch T, für $T = \infty$. Die Anzahl aller Glieder, welche $Nf(\alpha) < T$ geben, ist aber gleich dem 2λten Theile der Anzahl aller Werth-Systeme der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$, für welche die obigen $\mu-1$ Bedingungen gelten, verbunden mit der Bedingung $Nf(\alpha) < T$. Wird jetzt statt der Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ überall $\frac{x}{t}, \frac{x_1}{t}, \ldots \frac{x_{\lambda-2}}{t}$ gesetzt, so geht $f(\alpha)$ in $\frac{f(\alpha)}{t}$ und $Nf(\alpha)$ in $\frac{Nf(\alpha)}{t^{\lambda-1}}$ über; und macht man in den $\mu-1$ Bedingungsgleichungen bei (18.) $r = t^2$, so werden dieselben bei dieser Veränderung:

$$19. \quad \begin{cases} l\varepsilon_1(\alpha)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)z_{\mu-1} = \frac{1}{2}l(f\alpha f\alpha^{-1}) \\ l\varepsilon_1(\alpha^g)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^g)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)z_{\mu-1} = \frac{1}{2}l(f\alpha^g f\alpha^{-g}) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}})z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})z_{\mu-1} = \frac{1}{2}l(f\alpha^{g^{\mu-2}} f\alpha^{-g^{\mu-2}}); \end{cases}$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ sämmtlich in den Grenzen 0 und 1 liegende Gröfsen sind. Die neuen Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ haben aber nun nicht mehr alle ganzzahligen Werthe, sondern alle um die Differenz t abnehmenden oder zunehmenden Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, welche mit diesen Bedingungen bei (19.) verträglich sind. Setzt man nun $T = \frac{1}{t^{\lambda-1}}$, so wird die obige Bedingung $Nf(\alpha) < T$, für die neuen Werthe der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ zu $Nf(\alpha) < 1$. Endlich wird t unendlich klein genommen, wodurch T unendlich grofs wird, und die Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ zu continuirlich veränderlichen Gröfsen werden. Die Anzahl der Werthe, welche x annehmen kann, wird gleich $\frac{1}{t}\int dx$; eben so die Anzahl der Werthe, welche x_1 annimmt, gleich $\frac{1}{t}\int dx_1$, u. s. w.; wo die Integrale in den Grenzen zu nehmen sind, welche die obigen Bedingungen angeben. Die Anzahl aller Werthsysteme wird also

$$\frac{1}{t^{\lambda-1}}\int^{(\lambda-1)} dx\, dx_1 \ldots dx_{\lambda-2}$$

und dieselbe durch $T = \frac{1}{t^{\lambda-1}}$ dividirt, giebt

$$\int^{(\lambda-1)} dx\, dx_1 \ldots dx_{\lambda-2},$$

Dieses $\lambda-1$fache Integral, dividirt durch 2λ, drückt also, nach den oben angeführten Principien von *Dirichlet*, die Summe der Reihe $\Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}$ aus, für $s=1$, oder es ist:

$$20.\quad \Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{1}{2\lambda}\int^{(\lambda-1)} dx\,dx_1 \ldots dx_{\lambda-2}, \text{ für } s=1;$$

wo $f(\alpha)$ alle verschiedenen *wirklichen* complexen Zahlen umfafst und das $\lambda-1$fache Integral in Beziehung auf seine $\lambda-1$ Variabeln in denjenigen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Grenzen zu nehmen ist, welche den Bedingungen (19.) und aufserdem der Bedingung $Nf(\alpha) < 1$ genügen.

Um dieses Integral zu finden, führe ich statt der $\lambda-1$ Variabeln x, $x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ die neuen Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ ein, welche ich durch folgende Gleichungen bestimme:

$$21.\quad \begin{cases} f(\alpha) = u + u_\mu i & f(\alpha^{-1}) = u - u_\mu i \\ f(\alpha^g) = u_1 + u_{\mu+1} i & f(\alpha^{-g}) = u_1 - u_{\mu+1} i \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f(\alpha^{g^{\mu-1}}) = u_{\mu-1} + u_{2\mu-1} i & f(\alpha^{-g^{\mu-1}}) = u_{\mu-1} - u_{2\mu-1} i, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet ist. Hiernach ist allgemein

$$u_k = \frac{f(\alpha^{g^k}) + f(\alpha^{-g^k})}{2}, \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1,$$

$$u_k = \frac{f(\alpha^{g^k}) - f(\alpha^{-g^k})}{2i}, \text{ für } k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_h} = \frac{\alpha^{g^{k+h}} + \alpha^{-g^{k+h}}}{2}, \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_h} = \frac{\alpha^{g^{k+h}} - \alpha^{-g^{k+h}}}{2i}, \text{ für } k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1.$$

Die Transformation des $\lambda-1$fachen Integrals, bei welcher die Variabeln x, $x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ in die neuen Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{2\mu-1}$ verwandelt werden sollen, wird nun bekanntlich durch die Functional-Determinante

$$22.\quad \Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{\lambda-2}}{\partial x_{\lambda-2}}$$

bestimmt, deren Bildung darum zunächst auszuführen ist. Zu diesem Zwecke bilde ich den Ausdruck

$$23.\quad c_k^h = \frac{\partial u_k}{\partial x} + \beta^h \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \beta^{2h} \frac{\partial u_k}{\partial x_2} + \cdots + \beta^{(\lambda-2)h} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\lambda-2}};$$

und suche die Determinante der Gröfsen c_k^h, nämlich

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 c_3^3 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2},$$

welche, nach einem bekannten Satze über Determinanten, gleich ist dem Producte der gesuchten Functional-Determinante der Gröfsen $\frac{\partial u_k}{\partial x_h}$ in die Determinante der Gröfsen β^{kh}. Diese letztere Determinante ist aber bekanntlich gleich dem Producte aller Differenzen je zweier der Gröfsen 1, β, β^2, ... $\beta^{\lambda-1}$, dessen Werth nach der Formel

$$(1-\beta)(1-\beta^2)(1-\beta^3)\dots(1-\beta^{\lambda-2}) = \lambda-1$$

gleich $(\lambda-1)^\mu$ gefunden wird. Man hat daher

$$24. \qquad \Sigma\pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \dots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = (\lambda-1)^\mu \Sigma\pm \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial u_{\lambda-2}}{\partial x_{\lambda-2}}.$$

Setzt man nun, um c_k^h zu finden, in dem Ausdrucke (23.) für die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u_k}{\partial x}$, $\frac{\partial u_k}{\partial x_1}$, u. s. w. ihre Werthe, so erhält man

$$c_k^h = \frac{\alpha^{g^k}+\alpha^{-g^k}}{2}+\beta^h\left(\frac{\alpha^{g^{k+1}}+\alpha^{-g^{k+1}}}{2}\right)+\dots+\beta^{(\lambda-2)h}\left(\frac{\alpha^{g^{k-1}}+\alpha^{-g^{k-1}}}{2}\right),$$

wenn $k = 0, 1, 2, \dots \mu-1$; dagegen

$$c_k^h = \frac{\alpha^{g^k}-\alpha^{-g^k}}{2i}+\beta^h\left(\frac{\alpha^{g^{k+1}}-\alpha^{-g^{k+1}}}{2i}\right)+\dots+\beta^{(\lambda-2)h}\left(\frac{\alpha^{g^{k-1}}-\alpha^{-g^{k-1}}}{2i}\right),$$

wenn $k = \mu, \mu+1, \dots 2\mu-1$ ist;

und diese Werthe lassen sich wieder durch Anwendung des bekannten Ausdrucks der Kreistheilung

$$(\beta, \alpha) = \alpha+\beta\alpha^g+\beta^2\alpha^{g^2}+\dots+\beta^{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

in folgender Form darstellen:

$$c_k^h = \frac{(\beta^h, \alpha^{g^k})+(\beta^h, \alpha^{-g^k})}{2}, \quad \text{wenn } k = 0, 1, 2, \dots \mu-1 \text{ und}$$

$$c_k^h = \frac{(\beta^h, \alpha^{g^k})-(\beta^h, \alpha^{-g^k})}{2i}, \quad \text{wenn } k = \mu, \mu+1, \dots 2\mu-1;$$

und da

$$(\beta^h, \alpha^{g^k}) = \beta^{-kh}(\beta^h, \alpha); \quad (\beta^h, \alpha^{-g^k}) = (-1)^h\beta^{-kh}(\beta^h, \alpha)$$

ist, so nehmen diese Ausdrücke folgende einfache Gestalt an:

$$25. \quad \begin{cases} c_k^h = \left(\frac{1+(-1)^h}{2}\right)\beta^{-kh}(\beta^h, \alpha), & \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \mu-1, \\ c_k^h = \left(\frac{1-(-1)^h}{2i}\right)\beta^{-kh}(\beta^h, \alpha), & \text{für } k = \mu, \mu+1, \dots 2\mu-1. \end{cases}$$

Die Gröfsen c_k^h haben, wie man hieraus sieht, die Eigenschaft, dafs sie gleich Null werden: erstens wenn h ungerade ist und k einen der Werthe 0, 1,

$2, \ldots \mu-1$ hat; zweitens wenn h gerade ist und k einen der Werthe μ, $\mu+1, \ldots 2\mu-1$ hat. Vermöge dieser beiden Eigenschaften zerfällt die Determinante der Gröfsen c_k^h in ein Product zweier Determinanten und man hat

$$26. \quad \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \Sigma \pm c_0^0 c_1^2 c_2^4 \ldots c_{\mu-1}^{2\mu-1} . \Sigma \pm c_\mu^1 c_{\mu+1}^3 c_{\mu+2}^5 \ldots c_{2\mu-1}^{2\mu-1}.$$

Diese beiden Determinanten lassen sich nun mittels der gefundenen Ausdrücke der Gröfsen c_k^h sehr leicht finden. Aus den Gleichungen (25.) folgt nämlich

$$c_k^{2h} = \beta^{-2hk}(\beta^{2h}, \alpha), \qquad \text{wenn } k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1,$$
$$c_k^{2h+1} = -i\beta^{-(2h+1)k}(\beta^{2h+1}, \alpha), \quad \text{wenn } k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1,$$

und da (β^{2h}, α) und $-i(\beta^{2h+1}, \alpha)$ den untern Index k nicht enthalten, so haben alle Glieder der ersten dieser beiden Determinanten den gemeinschaftlichen Factor $(1, \alpha)(\beta^2, \alpha)(\beta^4, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-3}, \alpha)$, und der andere Factor ist die Determinante der Gröfsen β^{-2hk}; eben so haben alle Glieder der zweiten dieser Determinanten den gemeinschaftlichen Factor $(\beta, \alpha), (\beta^3, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-2}, \alpha) . i^\mu$, und als der andere Factor bleibt die Determinante der Gröfsen $\beta^{-(2h+1)k}$. Die beiden Determinanten der Gröfsen β^{-2hk} und $\beta^{-(2h+1)k}$, deren eine gleich dem Producte der Differenzen je zweier der Gröfsen $1, \beta^{-2}, \beta^{-4}, \ldots \beta^{-(\lambda-3)}$, die andere gleich dem Producte je zweier der Gröfsen $\beta^{-1}, \beta^{-3}, \beta^{-5}, \ldots \beta^{-(\lambda-2)}$ ist, sind, wie leicht zu zeigen, einander gleich, und zwar ist jede gleich $\mu^{\frac{1}{2}\mu}$; also hat man

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^2 c_2^4 \ldots c_{\mu-1}^{\lambda-3} = \mu^{\frac{1}{2}\mu}(1, \alpha)(\beta^2, \alpha)(\beta^4, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-3}, \alpha),$$
$$\Sigma \pm c_\mu^1 c_{\mu+1}^3 c_{\mu+2}^5 \ldots c_{2\mu-1}^{\lambda-2} = \mu^{\frac{1}{2}\mu}(\beta, \alpha)(\beta^3, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-2}, \alpha) . i^\mu,$$

mithin vermöge der Gleichung (26.),

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \mu^\mu (1, \alpha)(\beta, \alpha)(\beta^2, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-2}, \alpha),$$

und da

$$(1, \alpha) = -1, \quad (\beta^k, \alpha)(\beta^{-k}, \alpha) = \pm\lambda, \quad (\beta^\mu, \alpha) = (-1, \alpha) = \pm\sqrt{\pm\lambda}$$

ist, so ergiebt sich, je zwei solcher Factoren zusammenfassend:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \pm \mu^\mu \lambda^{\mu-1} . \sqrt{\pm\lambda} . i^\mu.$$

Das Vorzeichen unter der Wurzel $\sqrt{\pm\lambda}$ ist bekanntlich so zu nehmen, dafs es $+$ ist, wenn λ von der Form $4n+1$, also $\frac{1}{2}(\lambda-1) = \mu$ eine grade Zahl ist, aber $-$, wenn λ von der Form $4n+3$, also $\frac{1}{2}(\lambda-1) = \mu$ eine ungerade Zahl ist. Im ersteren Falle wird $i^\mu = \pm 1$, im zweiten Falle $i^\mu = \pm i$, also ist

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \pm \mu^\mu \lambda^{\mu-\frac{1}{2}};$$

mithin endlich, vermöge Gleichung (24.), weil $\lambda-1=2\mu$ ist:

$$\Sigma\pm\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial u_{\lambda-2}}{\partial x_{\lambda-2}}=\frac{\lambda^{\mu-\frac{1}{2}}}{2^{\mu}}.$$

Hiernach verwandelt sich das $\lambda-1$fache Integral der Gleichung (20.), dessen Variabeln $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ sind, durch Division mit dieser Functional-Determinante in ein anderes, dessen Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ sind, und man erhält

$$27.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s}=\frac{2^{\mu-1}}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}\int^{(\lambda-1)}du\,du_1\,du_2\ldots du_{\lambda-2}\quad(\text{für } s=1).$$

Ich unterwerfe nun dieses Integral wieder einer neuen Transformation, indem ich statt der Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ die neuen $v, v_1, v_2, \ldots v_{\mu-1}$, $w, w_1, w_2, \ldots w_{\mu-1}$ einführe, welche mittels der Gleichungen

$$u_k=e^{v_k}.\cos w_k,\quad u_{k+\mu}=e^{v_k}.\sin w_k$$

bestimmt sind, wo k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \mu-1$, hat. Es läfst sich hier die Functional-Determinante, welche die partiellen Differentialquotienten der Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ in Beziehung auf die neu einzuführenden Variabeln $v, v_1, \ldots v_{\mu-1}, w, w_1, \ldots w_{\mu-1}$ genommen enthält, leichter finden, als die umgekehrte, weshalb wir diese zur Transformation des Integrals benutzen wollen. Mittels der Ausdrücke

$$\frac{\partial u_k}{\partial v_k}=+e^{v_k}\cos w_k,\quad \frac{\partial u_{k+\mu}}{\partial v_k}=+e^{v_k}\sin w_k,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial w_k}=-e^{v_k}\sin w_k,\quad \frac{\partial u_{k+\mu}}{\partial w_k}=+e^{v_k}\cos w_k,$$

welche für alle Werthe $k=0, 1, 2, \ldots \mu-1$ gelten, und da allgemein $\frac{\partial u_k}{\partial v_h}$, so wie $\frac{\partial u_k}{\partial w_h}$, mit Ausnahme der beiden Fälle $h=k$ und $h+\mu=k$, gleich Null sind, kann man, nach bekannten Sätzen, den Werth dieser Functional-Determinante leicht finden, weshalb wir uns mit der Herleitung derselben nicht aufhalten, sondern nur das Resultat geben, welches

$$\Sigma\pm\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\cdots\frac{\partial u_\mu}{\partial w}\frac{\partial u_{\mu+1}}{\partial w_1}\cdots\frac{\partial u_{2\mu-1}}{\partial w_{\mu-1}}=e^{2v}.e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\mu-1}}\text{ ist.}$$

Wird nun mittels dieser Functional-Determinante das Integral der Gleichung (27.) transformirt, so erhält man

$$28.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}=\frac{2^{\mu-1}}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}\int^{(\lambda-1)}e^{2v}.e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\mu-1}}dv\,dv_1\ldots dv_{\mu-1}dw\,dw_1\ldots dw_{\mu-1},$$

für $s=1$. Die einschränkenden Bedingungen, welche die Grenzen der

Integrationen für die ursprünglichen Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_{\lambda-2}$ bestimmen, nämlich die in den Gleichungen (19.) enthaltenen, verbunden mit der Bedingung $Nf(\alpha) < 1$, werden nun, weil allgemein $f(\alpha^{g^k}).f(\alpha^{-g^k}) = e^{2v_k}$ ist, für die neuen Variabeln folgendermaßsen dargestellt:

$$29. \quad \begin{cases} l\varepsilon_1(\alpha)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)z_{\mu-1} = v \\ l\varepsilon_1(\alpha^g)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^g)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)z_{\mu-1} = v_1 \\ \ldots \\ l\varepsilon(\alpha^{g^{\mu-2}})z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})z_{\mu-1} = v_{\mu-2} \end{cases}$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ beliebige, zwischen 0 und 1 liegende Gröfsen sind und

$$e^{2v}.e^{2v_1}.e^{2v_2} \ldots e^{2v_{\mu-1}} < 1 \text{ ist.}$$

Diese Bedingungen enthalten die Gröfsen $w, w_1, w_2, \ldots w_{\mu-1}$ gar nicht, und da

$$30. \quad \operatorname{tang} w_k = \frac{u_{\mu+k}}{u_k}$$

ist und dieser Bruch wegen der Werthe der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-1}$, welche nur, μ Bedingungsgleichungen unterworfen, von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren können, selbst von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt, und nach den Ausdrücken von u_k und $u_{k+\mu}$, welche ebenfalls sowohl positiv als negativ sein können, auch $\sin w_k$ und $\cos w_k$ sowohl positive als negative Werthe annehmen müssen: so folgt, dafs w_k in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{3}{2}\pi$ zu nehmen ist. Führt man nun alle Integrationen in Beziehung auf die Variabeln $w, w_1, \ldots w_{\mu-1}$ in diesen Grenzen aus, so erhält man

$$31. \quad \Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{2^{2\mu-1}.\pi^\mu}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}} \int^{(\mu)} e^{2v} e^{2v_1} \ldots e^{2v_{\mu-1}} dv\, dv_1 \ldots dv_{\mu-1}.$$

Ich führe nun zunächst weiter die Integration in Bezug auf die bestimmte Variable $v_{\mu-1}$ aus. Da $\int e^{2v_{\mu-1}} dv_{\mu-1} = \frac{1}{2} e^{2v_{\mu-1}}$ ist, und da $e^{2v}.e^{2v_1} \ldots e^{2v_{\mu-1}}$ in den Grenzen 0 und 1 liegen mufs, also $v_{\mu-1}$ in den Grenzen $e^{2v_{\mu-1}} = 0$ bis $e^{2v_{\mu-1}} = e^{-2v}.e^{-2v_1} \ldots e^{-2v_{\mu-2}}$ zu nehmen ist, so wird

$$32. \quad \Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{2^{2\mu-2}.\pi^\mu}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}} \int^{(\mu-1)} dv\, dv_1 \ldots dv_{\mu-2}.$$

Endlich werden noch statt der Variabeln $v, v_1, \ldots v_{\mu-2}$ die Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ eingeführt, welche durch die Gleichungen (29.) bestimmt und für welche alle Integrationen in den Grenzen 0 und 1 auszuführen sind. Hierzu braucht man die Determinante dieses Systems linearer Gleichungen (29.), welche ich durch Δ bezeichne, durch deren Anwendung

man sogleich

$$\Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{2^{2\mu-2}\pi^\mu\Delta}{\lambda^{\mu+1}}\int^{(\mu-1)}dz_1dz_2\ldots dz_{\mu-1}$$

erhält; und da alle Integrationen in Bezug auf $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ in den Grenzen 0 und 1 auszuführen sind, so hat dieses $\mu-1$fache Integral selbst den Werth 1 und es ist

$$33.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{2^{2\mu-2}.\pi^\mu.\Delta}{\lambda^{\mu+1}},\ \text{für}\ s=1.$$

Es ist nun weiter zu zeigen, dafs auch die übrigen Glieder des Ausdrucks (12.) alle denselben Werth haben, wie dieses erste, für $s=1$; d. h. dafs allgemein

$$\Sigma\frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = \Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s},\ \text{für}\ s=1$$

ist, wo $f_k(\alpha)$ alle idealen complexen Zahlen einer bestimmten Classe bezeichnet. Diese Zahlen $f_k(\alpha)$, da sie äquivalent sind, haben alle einen und denselben idealen Multiplicator $\varphi(\alpha)$, mit welchem multiplicirt sie zu *wirklichen* complexen Zahlen werden, und es ist, wenn $\varphi(\alpha)f_k(\alpha)=F_k(\alpha)$ gesetzt wird:

$$34.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = N\varphi(\alpha)\Sigma\frac{s-1}{(NF_k(\alpha))^s},\ \text{für}\ s=1;$$

wo $F_k(\alpha)$ alle wirklichen complexen Zahlen bedeutet, welche den bestimmten idealen Factor $\varphi(\alpha)$ haben. Die Untersuchung des Werths der Summe

$$\Sigma\frac{s-1}{(NF_k(\alpha))^s},\ \text{für}\ s=1,$$

ist der obigen Untersuchung der entsprechenden Summe für die complexen Zahlen $f(\alpha)$ vollkommen gleich; nur dafs hier noch gewisse einschränkende Bedingungen hinzutreten, welche die Coëfficienten der wirklichen complexen Zahl $F_k(\alpha)$ erfüllen müssen, damit $F_k(\alpha)$ den idealen complexen Factor $\varphi(\alpha)$ enthalte. Die Bedingung, dafs eine wirkliche complexe Zahl einen gegebenen idealen Factor enthalte, wird aber, wie wir in der Abhandlung 16. Band 35. dieses Journals gezeigt haben, immer durch eine Anzahl Congruenz-Bedingungen ausgedrückt, welche die Coëfficienten der wirklichen complexen Zahl erfüllen müssen und welche durch die idealen Primfactoren dieses idealen Factors vollkommen bestimmt sind. Es möge nun $\varphi(\alpha)$, in seine idealen Primfactoren zerlegt, einen bestimmten der Primfactoren der zum Exponenten d gehörenden realen Primzahl q_d genau m mal enthalten, ferner einen bestimmten der Primfactoren der zum Exponenten d' gehörenden Primzahl $q'_{d'}$ genau m' mal, u. s. w., so wird, wie wir in der oft erwähnten

Abhandlung gezeigt haben, die Bedingung, dafs $F_k(\alpha)$ den ersten dieser Primfactoren $m$mal enthalte, genau durch d Congruenzen für den Modul q_d^m ausgedrückt, welche in Beziehung auf die Coëfficienten der wirklichen complexen Zahl $F_k(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^g + x_2\alpha^{g^2} + \ldots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$ lineär sind. Eben so wird die Bedingung, dafs $F_k(\alpha)$ den andern Primfactor m'mal enthalte, durch d' solche Congruenzen für den Modul $q'^{m'}_{d'}$ ausgedrückt; u. s. w. Eine einzige lineäre Congruenz unter den Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ für den Modul q_d^m macht aber, dafs von allen den Werth-Systemen dieser Gröfsen, welche den übrigen Bedingungen genügen, nur der q_d^mte Theil zu nehmen ist, und d solche Congruenz-Bedingungen zusammen machen demgemäfs, dafs nur der q_d^{md}te Theil gelten kann. Eben so bewirken die d' lineären Congruenzen, mod. $q'^{m'}_{d'}$, dafs von den Werthsystemen der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ nur der $q'^{m'd'}_{d'}$te Theil zu nehmen ist, u. s. w. Der Werth der Summe $\Sigma\frac{s-1}{(NF_k(\alpha))^s}$ ist also genau gleich dem $q_d^{md}.q'^{m'd'}_{d'}\ldots$ten Theile der Summe $\Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s}$, für $s=1$, wenn $F_k(\alpha)$ alle wirklichen complexen Zahlen bedeutet, welche den idealen Factor $\varphi(\alpha)$ enthalten, und $f(\alpha)$ alle wirklichen complexen Zahlen ohne Ausnahme. Die Gleichung (34.) geht daher in

$$35.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = \frac{N\varphi(\alpha)}{q_d^{md}.q'^{m'd'}_{d'}\ldots}\Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s},\quad \text{für } s=1,$$

über, und da vermöge der idealen Primfactoren, welche $\varphi(\alpha)$ nach der Voraussetzung enthält, $N\varphi(\alpha) = q_d^{md}.q'^{m'd'}_{d'}\ldots$ ist, so hat man endlich

$$36.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = \Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s};\quad \text{für } s=1;$$

was zu beweisen war.

Da wir nun den Werth des ersten Gliedes der Gleichung (12.) gefunden und bewiesen haben, dafs alle diese Glieder, deren Anzahl gleich H, der Anzahl aller nicht äquivalenten Classen ist, einander gleich sind, so haben wir folgenden zweiten Ausdruck des Werths der Reihe R, für $s=1$:

$$37.\quad R = \frac{2^{2\mu-2}.\pi^\mu.\Delta.H}{\lambda^{\mu+1}},\quad \text{für } s=1;$$

und da der erste Ausdruck derselben Reihe nach der Gleichung (11.)

$$R = \pm \frac{\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} \cdot 2^{\frac{1}{2}(\lambda-3)} \cdot P \cdot D}{\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}} \quad \text{für } s = 1$$

war, so haben wir endlich, durch Gleichsetzung beider Ausdrücke:

$$\frac{2^{2\mu-2} \cdot \pi^{\mu} \cdot \Delta \cdot H}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} \cdot 2^{\frac{1}{2}(\lambda-3)} \cdot P \cdot D}{\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}},$$

also, nach gehöriger Reduction, da $\mu = \frac{1}{2}(\lambda-1)$ ist, für den gesuchten Ausdruck der Anzahl aller nichtäquivalenten Classen der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten idealen complexen Zahlen:

$$38. \quad H = \frac{P \cdot D}{(2\lambda)^{\mu-1} \cdot \Delta}.$$

Der bessern Übersicht wegen wiederhole ich hier noch einmal die Bedeutung der einzelnen in dieser Formel vorkommenden Zeichen. Es ist $\mu = \frac{1}{2}(\lambda-1)$; ferner ist

$$P = \varphi(\beta)\varphi(\beta^3)\varphi(\beta^5) \ldots \varphi(\beta^{2\mu-1}),$$

wenn

$$\varphi(\beta) = 1 + g_1\beta + g_2\beta^2 + g_3\beta^3 + \ldots + g_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2},$$

$g_1, g_2, g_3, \ldots g_{\lambda-2}$ die kleinsten positiven Reste sind, welche die Potenzen $g, g^2, g^3, \ldots g^{\lambda-2}$ einer primitiven Wurzel der Primzahl λ für den Modul λ geben, und β eine primitive Wurzel der Gleichung $\beta^{\lambda-1} = 1$ ist. Ferner ist D die Determinante des Systems folgender Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} le(\alpha), & le(\alpha^{g}), & \ldots & le(\alpha^{g^{\mu-2}}), \\ le(\alpha^{g}), & le(\alpha^{g^2}), & \ldots & le(\alpha^{g^{\mu-1}}), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ le(\alpha^{g^{\mu-2}}), & le(\alpha^{g^{\mu-1}}), & \ldots & le(\alpha^{g^{2\mu-4}}). \end{array}$$

Sodann ist

$$e(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^{g})(1-\alpha^{-g})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}\right)}$$

und Δ die Determinante des Systems

$$\begin{array}{llll} l\varepsilon_1(\alpha), & l\varepsilon_2(\alpha), & \ldots & l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g}), & \ldots & l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g}), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}}), & \ldots & l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}}), \end{array}$$

wo $\varepsilon_1(\alpha), \varepsilon_2(\alpha), \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ ein System von Fundamental-Einheiten sind.

Da eine vollständige Theorie der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen zugleich mit die Theorie der aus den Perioden dieser Wurzeln gebildeten complexen Zahlen umfassen mufs und in vielen Stücken sich sogar auf diese stützt, so habe ich nicht versäumt, auch die Ausdrücke für die Anzahl der nichtäquivalenten Classen dieser aus Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen vollständig auszuarbeiten. Die anzuwendenden Principien, so wie die Ausführung derselben im Einzelnen, sind aber mit den hier entwickelten so übereinstimmend, dafs ich die Entwicklung dieser Ausdrücke hier übergehe und mich darauf beschränke, nur die Resultate den Lesern mitzutheilen.

Ordnet man die λten Wurzeln der Einheit α, α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\lambda-2}}$ nach den *Gaufsischen* Perioden, und zwar in e Perioden von je f Gliedern, wo $e.f = \lambda - 1$ ist, bildet die aus diesen Perioden zusammengesetzten complexen Zahlen und theilt dieselben und ihre sämmtlichen idealen Factoren in alle nichtäquivalenten Classen ein, welche für dieselben bestehen und deren Anzahl gleich H sei: so müssen in dem Ausdrucke des H die beiden Fälle unterschieden werden, wo f *gerade* und wo f *ungerade* ist, und man erhält dann folgende Resultate.

Erstens, wenn f *gerade* ist, d. h. wenn die Perioden aus einer *geraden* Anzahl von Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ bestehen, ist

$$39. \quad H = \frac{D}{\Delta};$$

wo D die Determinante folgender $(e-1)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} lE(\alpha), & lE(\alpha^g), & \ldots & lE(\alpha^{g^{e-2}}), \\ lE(\alpha^g), & lE(\alpha^{g^2}) & \ldots & lE(\alpha^{g^{e-1}}), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ lE(\alpha^{g^{e-2}}), & lE(\alpha^{g^{e-1}}), & \ldots & lE(\alpha^{g^{2e-4}}) \end{array}$$

und

$$E(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^g)(1-\alpha^{g^{e+1}}) \ldots (1-\alpha^{g^{(f-1)e+1}})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{g^e}) \ldots (1-\alpha^{g^{(f-1)e}})}\right)}$$

ist; welches eine aus den e Perioden von je f Gliedern gebildete complexe Einheit und wo Δ die Determinante folgender $(e-1)^2$ Gröfsen ist:

$$\begin{array}{llll} l\varepsilon_1(\alpha), & l\varepsilon_2(\alpha), & \ldots & l\varepsilon_{e-1}(\alpha), \\ l\varepsilon_1(\alpha^g), & l\varepsilon_2(\alpha^g), & \ldots & l\varepsilon_{e-1}(\alpha^g), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{e-2}}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g^{e-2}}), & \ldots & l\varepsilon_{e-1}(\alpha^{g^{e-2}}). \end{array}$$

$\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{e-1}(\alpha)$ ist ein System von Fundamental-Einheiten, welche aus den e Perioden von je f Gliedern gebildet sind.

Zweitens, wenn f *ungerade* ist, d. h. wenn die Perioden aus einer *ungeraden* Anzahl von Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ bestehen, so ist

$$40. \quad H = \frac{P.D}{2^{\frac{1}{2}e-1}\Delta},$$

wo D die Determinante folgender $\frac{1}{4}(e-1)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} lE(\alpha), & lE(\alpha^g), & \ldots & lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), \\ lE(\alpha^g), & lE(\alpha^{g^2}), & \ldots & lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-1}}), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), & lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-1}}), & \ldots & lE(\alpha^{g^{e-4}}) \end{array}$$

und

$$E(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^g)(1-\alpha^{g^{\frac{1}{2}e+1}}) \ldots (1-\alpha^{g^{(2f-1)\frac{1}{2}e+1}})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{g^{\frac{1}{2}e}}) \ldots (1-\alpha^{g^{(2f-1)\frac{1}{2}e}})}\right)}$$

ist; welches eine aus $\frac{1}{2}e$ Perioden von je $2f$ Gliedern gebildete complexe Einheit ist. Ferner ist Δ die Determinante folgender $(\frac{1}{2}e-1)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} l\varepsilon_1(\alpha), & l\varepsilon_2(\alpha), & \ldots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha) \\ l\varepsilon_1(\alpha^g), & l\varepsilon_2(\alpha^g), & \ldots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha^g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), & \ldots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}) \end{array}$$

und $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha)$ ist ein System von Fundamental-Einheiten, welche aus den $\frac{1}{2}e$ Perioden von je $2f$ Gliedern gebildet sind, wobei endlich P folgendes Product bezeichnet:

$$\begin{aligned} P &= \varphi(\beta)\varphi(\beta^3)\varphi(\beta^5) \ldots \varphi(\beta^{e-1}) \\ \varphi(\beta) &= A + A_1\beta + A_2\beta^2 + \ldots + A_{e-1}\beta^{e-1} \\ A &= \frac{1}{\lambda}(1 + g_e + g_{2e} + \ldots + A_{(f-1)e}) \\ A_1 &= \frac{1}{\lambda}(g_1 + g_{e+1} + g_{2e+1} + \ldots + g_{(f-1)e+1}) \\ &\cdots \\ A_{e-1} &= \frac{1}{\lambda}(g_{e-1} + g_{2e-1} + g_{3e-1} + \ldots + g_{fe-1}). \end{aligned}$$

$g_1, g_2, \ldots g_{\lambda-2}$ bezeichnen, wie oben, die kleinsten positiven Reste, welche die Potenzen einer primitiven Wurzel $g, g^2, g^3, \ldots g^{\lambda-2}$ für den Modul λ geben, und β ist eine primitive Wurzel der Gleichung $\beta^c = 1$.

Ich füge noch einige Bemerkungen über die angegebenen Resultate hinzu. Die Anzahl H der nichtäquivalenten Classen aller aus den einfachen Wurzeln $\alpha, \alpha^g, \ldots \alpha^{g^{\lambda-2}}$ gebildeten complexen Zahlen und der idealen Factoren derselben, welche in der Formel (38.) gegeben ist, besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Factoren, nämlich dem Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ und dem Factor $\frac{D}{\Delta}$; welche beide für sich ganze Zahlen sind. Für den Factor $\frac{D}{\Delta}$ folgt dies unmittelbar aus der Gleichung (39.), welche zeigt, dafs dasselbe $\frac{D}{\Delta}$ für sich die Anzahl aller nichtäquivalenten Classen für die aus den zweigliedrigen Perioden zu bildenden idealen complexen Zahlen darstellt, also nothwendig eine ganze Zahl ist. Um in Beziehung auf den andern Factor des H in der Formel (38.) Dasselbe zu zeigen, verwandele ich die Factoren von der Form $\varphi(\beta^{2n-1})$, aus denen P zusammengesetzt ist, nämlich

$$\varphi(\beta^{2n-1}) = 1 + g_1\beta^{2n-1} + g_2\beta^{2(2n-1)} + \ldots + g_{\lambda-2}\beta^{(\lambda-2)(2n-1)}$$

mit Hülfe der Gleichung $\beta^\mu = -1$ und $g_{k+\mu} = \lambda - g_k$ in die Form

$$\varphi(\beta^{2n-1}) = 2 - \lambda + (2g_1 - \lambda)\beta^{2n-1} + (2g_2 - \lambda)\beta^{2(2n-1)} + \ldots$$
$$+ (2g_{\mu-1} - \lambda)\beta^{(\mu-1)(2n-1)},$$

in welchem Ausdrucke alle Coëfficienten der einzelnen Glieder ungerade Zahlen sind. Es kommt nun darauf an, wie viel mal μ den Factor 2 enthält. Setzt man deshalb $\mu = 2^r.\nu$, wo ν ungerade ist und r auch gleich Null sein kann, und addirt zu dem Ausdrucke des $\varphi(\beta^{2n-1})$ die Gleichung

$$1 - \beta^{2^r(2n-1)} + \beta^{2.2^r(2n-1)} - \ldots + \beta^{(\nu-1)2^r(2n-1)} = 0,$$

so wie dieselbe Gleichung, multiplicirt mit $\beta^{2n-1}, \beta^{2(2n-1)}, \ldots \beta^{(2^r-1)(2n-1)}$, welche für jeden Werth des n Statt hat, mit alleiniger Ausnahme des Falles $2n-1=\nu$: so werden alle Coëfficienten in $\varphi(\beta^{2n-1})$ zu graden Zahlen; also ist $\varphi(\beta^{2n-1})$, mit Ausnahme des Falles $2n-1=\nu$, immer durch 2 theilbar, und das Product P, welches aus μ solchen Factoren besteht, ist theilbar durch $2^{\mu-1}$. Um weiter zu zeigen, dafs P auch durch $\lambda^{\mu-1}$ theilbar ist, multiplicire ich $\varphi(\beta^{2n-1})$

mit $g\beta^{2n-1}-1$, wo g eine primitive Wurzel und deshalb $g^{\lambda-1}-1$ durch λ und $g^{\mu}+1$ durch λ theilbar ist. Ich wähle auch, was immer angeht, die primitive Wurzel so, dafs $g^{\mu}+1$ den Factor λ nur *einmal* enthält. Es wird alsdann

$$(g\beta^{2n-1})\varphi(\beta^{2n-1}) = gg_{\lambda-2}-1+(gg_{\lambda-1}-g_1)\beta^{2n-1}+(gg_1-g_2)\beta^{2(2n-1)}+\dots$$
$$+(gg_{\lambda-3}-g_{\lambda-2})\beta^{(\lambda-2)(2n-1)},$$

und es sind nun alle Coëfficienten dieses Ausdrucks durch λ theilbar; wie aus der Congruenz $g_k \equiv g^k$, mod. λ, sogleich erhellt. Setzt man nun in dem durch λ theilbaren Ausdrucke $(g\beta^{2n-1})\varphi(\beta^{2n-1})$ nach einander $n=1, 2, 3, \dots \mu$ und bildet das Product, so erhält man $(g^{\mu}+1)P$ theilbar durch λ^{μ}, und da $g^{\mu}+1$ den Factor λ nur einmal enthält, so mufs P den Factor $\lambda^{\mu-1}$ enthalten. Da wir nun bewiesen haben, dafs P durch $2^{\mu-1}$ und auch durch $\lambda^{\mu-1}$ theilbar ist, so ist wirklich $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ eine ganze Zahl; wie behauptet wurde.

In Beziehung auf die Classenzahl der aus Perioden zu bildenden idealen complexen Zahlen tritt ein wesentlicher Unterschied auf, zwischen denen, bei welchen die Perioden eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthalten. Wenn nämlich die Perioden eine ungerade Anzahl von Gliedern enthalten, so besteht immer die Classen-Anzahl aus zwei solchen verschiedenen ganzzahligen Factoren, während in den Ausdrücken für die Classenzahl bei den aus Perioden von gerader Gliederzahl gebildeten idealen complexen Zahlen nur der eine dieser beiden Factoren auftritt.

Für den Fall, wo es nur zwei Perioden giebt, deren jede aus $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ Gliedern besteht, geben die Formeln (39. und 40.) die Anzahl der Classen für die quadratischen Formen, deren Determinante eine Primzahl gleich λ ist, und zwar die eine für die positive Determinante λ, die andere für dieselbe negative Determinante.

Eine sehr merkwürdige einfache Beziehung, in welcher die Classenzahlen der aus Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen zur Classenzahl der aus den einfachen Wurzeln der Gleichung $\alpha^{\lambda}=1$ gebildeten steht, ist die, dafs jene immer aliquote genaue Theile von dieser sind, da, wo sie ihr nicht völlig gleich sind. Diese Eigenschaft würde sich aus den gefundenen Ausdrücken für die Classen-Anzahl allgemein nur sehr schwer entwickeln lassen:

sie kann aber mit Leichtigkeit unmittelbar aus der Definition der Äquivalenz der idealen complexen Zahlen hergeleitet werden; wobei man nur den einen Satz braucht, dafs die Classen-Anzahl stets eine endliche, bestimmte ist. Es mögen $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ e Perioden von je f Gliedern sein, wo $ef = \lambda - 1$ ist und ferner $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ die h nichtäquivalenten Classen der aus diesen Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen repräsentiren, und zwar so, dafs $\varphi(\eta)$ eine beliebige solche complexe Zahl der ersten Classe, $\varphi_1(\eta)$ eine beliebige der zweiten Classe u. s. w. darstellt. Da nun die aus den Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen alle in den aus den einfachen Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten mit einbegriffen sind, so müssen die durch $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ repräsentirten Classen alle in den verschiedenen Classen dieser allgemeineren complexen Zahlen vorkommen, deren Anzahl gleich H sei. Es kann nun erstens der Fall eintreten, dafs aufser den h Classen, welche die aus Perioden gebildeten complexen idealen Zahlen geben, für die aus den einfachen Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten gar keine andern Classen Statt haben, dafs also $h = H$ ist. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so sei $f(\alpha)$ eine ideale complexe Zahl, welche nicht in den h Classen vorkommt, in welchen $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ vorkommen: dann gehören, wie leicht zu zeigen ist, $f(\alpha)\varphi(\eta), f(\alpha)\varphi_1(\eta), f(\alpha)\varphi_2(\eta), \ldots f(\alpha)\varphi_{h-1}(\eta)$ nur solchen Classen an, welche weder unter sich, noch mit den Classen, denen $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ angehören, äquivalent sind. Wäre nämlich zunächst $f(\alpha)\varphi_r(\eta)$ äquivalent $f(\alpha)\varphi_s(\eta)$, so multiplicire ich beide mit demselben Multiplicator $F(\alpha)$, welcher bewirkt, dafs $F(\alpha)f(\alpha)$ eine *wirkliche* complexe Zahl ist; woraus dann folgen würde, dafs $\varphi_r(\eta)$ äquivalent $\varphi_s(\eta)$ sein müfste; gegen die Voraussetzung. Wäre ferner $f(\alpha)\varphi_r(\eta)$ äquivalent $\varphi_s(\eta)$, so multiplicire ich beide mit einem solchen Multiplicator $\Phi_r(\eta)$, welcher $\Phi_r(\eta)\varphi_r(\eta)$ zu einer wirklichen complexen Zahl macht; woraus folgen würde, dafs $f(\alpha)$ äquivalent $\Phi_r(\eta)\varphi_s(\eta)$ sei, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist, weil $f(\alpha)$, wenn es einer aus den Perioden gebildeten idealen complexen Zahl äquivalent wäre, schon in den ersten h Classen, welche durch $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ repräsentirt sind, enthalten sein müfste. Eine einzige, nicht in diesen h Classen enthaltene complexe ideale Zahl macht also, dafs eine neue Gruppe von h Classen hinzukommt. Eben so macht eine einzige nicht in diesen $2h$ Classen enthaltene ideale complexe Zahl, dafs eine ganze dritte Gruppe von h Classen, die weder unter sich, noch mit den vorigen äquivalent sind, hinzukommt: dafs also $3h$ Classen existiren; und so geht dies

weiter, bis wirklich alle H Classen erschöpft sind, welche sich, wie hieraus zu ersehen ist, nur durch ein genaues Vielfaches von h erschöpfen lassen. Es ist also immer H ein Vielfaches von h, oder h ein genau aliquoter Theil von H; was zu beweisen war. Eben so wird bewiesen, dafs wenn f' ein Vielfaches von f ist, und zugleich ein Theiler von $\lambda-1$, die Classen-Anzahl der aus Perioden von je f' Gliedern gebildeten idealen complexen Zahlen immer ein genau aliquoter Theil von der Classen-Anzahl für diejenigen ist, welche aus Perioden von je f Gliedern gebildet sind.

Breslau, den 16ten Juni 1849.

7.

Zwei besondere Untersuchungen über die Classen-Anzahl und über die Einheiten der aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor zu Breslau.)

Nachdem ich in der vorhergehenden Abhandlung die Classen-Anzahl für die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen angegeben habe, will ich jetzt zunächst folgende Frage vollständig beantworten:

Für welche Werthe der Primzahl λ ist die Classen-Anzahl der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen idealen Zahlen durch λ theilbar; und für welche nicht?

Nach der Gleichung (38.) in der vorhergehenden Abhandlung ist diese Classen-Anzahl:

$$1.\quad H = \frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}.\frac{D}{\Delta},$$

wo die beiden Factoren, aus welchen sie zusammengesetzt ist, nämlich $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ und $\frac{D}{\Delta}$, für sich ganze Zahlen sind; es wird also die Untersuchung, ob H durch λ theilbar sei, oder nicht, für diese beiden Factoren besonders zu führen sein. Ich mache den Anfang mit dem Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$, in welchem

$$G = \varphi(\beta)\varphi(\beta^3)\varphi(\beta^5)\,\ldots\,\varphi(\beta^{\lambda-2}),$$
$$\varphi(\beta) = 1+g_1\beta+g_2\beta^2+g_3\beta^3+\,\ldots\,+g_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2} \text{ ist.}$$

Ich multiplicire $\varphi(\beta)$ mit $g\beta-1$, so wird

$$(g\beta-1)\varphi(\beta) = gg_{\lambda-2}-1+(gg_{\lambda-1}-g_1)\beta+(gg_1-g_2)\beta^2+\,\ldots$$
$$+(gg_{\lambda-3}-g_{\lambda-2})\beta^{\lambda-2},$$

und es sind nun, wie schon in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt, die Coëfficienten aller einzelnen Glieder durch λ theilbar. Setzt man also

$$gg_{k-1}-g_k = \lambda b_k$$

und

$$b_0+b_1\beta+b_2\beta^2+\,\ldots\,+b_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2} = \psi(\beta),$$

so erhält man

$$(g\beta-1)\varphi(\beta) = \lambda\psi(\beta),$$

und hieraus, wenn β in β^3, β^5, ... $\beta^{\lambda-2}$ verwandelt und das Product gebildet wird, bei welchem

$$(g\beta-1)(g\beta^3-1)(g\beta^5-1)\ \ldots\ (g\beta^{\lambda-2}-1) = g^\mu+1$$

ist:

$$(g^\mu+1)P = \lambda^\mu\psi(\beta)\psi(\beta^3)\psi(\beta^5)\ \ldots\ \psi(\beta^{\lambda-2}).$$

Es ist $g^\mu+1$ (da g eine primitive Wurzel des λ und $\mu=\frac{1}{2}(\lambda-1)$ ist) bekanntlich durch λ theilbar; man kann also $g^\mu+1=\lambda G$ setzen, wo G eine ganze Zahl ist. Man weifs auch, dafs nur in besondern Fällen, für einzelne Werthe der primitiven Wurzel g, der Ausdruck $g^\mu+1$ den Factor λ zweimal, oder wohl gar mehrmal enthalten kann: wählt man aber, was immer möglich ist, die primitive Wurzel g so, dafs dies nicht der Fall ist, so ist G nicht durch λ theilbar. Man erhält also

$$2.\qquad 2^{\mu-1}g\cdot\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}} = \psi(\beta)\psi(\beta^3)\psi(\beta^5)\ \ldots\ \psi(\beta^{\lambda-2}).$$

Es kann demnach $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ nur dann durch λ theilbar sein, wenn das Product $\psi(\beta)\psi(\beta^3)\ldots\psi(\beta^{\lambda-2})$ durch λ theilbar ist; und umgekehrt, wenn dieses Product durch λ theilbar ist, so ist auch wirklich dieser erste Factor der Classen-Anzahl H durch λ theilbar. Nun ist aber offenbar, wenn man statt der primitiven Wurzel β der Gleichung $\beta^{\lambda-1}=1$ die primitive Congruenzwurzel g der Congruenz $g^{\lambda-1}\equiv 1$, mod. λ, setzt:

$$\psi(\beta)\psi(\beta^3)\ \ldots\ \psi(\beta^{\lambda-2}) \equiv \psi(g)\psi(g^3)\ \ldots\ \psi(g^{\lambda-2}),\ \text{mod.}\ \lambda;$$

also wenn irgend einer der ganzzahligen Factoren des Products $\psi(g)\psi(g^3)\ldots$ $\ldots\psi(g^{\lambda-2})$ durch λ theilbar ist, so mufs auch $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ durch λ theilbar sein; und umgekekrt, wenn keine der ganzzahligen Gröfsen $\psi(g)$, $\psi(g^3)$, ... $\psi(g^{\lambda-2})$ durch λ theilbar ist, so ist auch $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ nicht durch λ theilbar. Es hangt also für diesen ersten Factor der Classen-Anzahl H Alles davon ab, ob die Congruenz

$$3.\qquad b_0+b_1g^{2n-1}+b_2g^{2(2n-1)}+\ \ldots\ +b_{\lambda-2}g^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0,\ \text{mod.}\ \lambda,$$

für irgend einen der Werthe $n=1, 2, \ldots \mu$ erfüllt wird; oder für keinen derselben. Dividirt man die Congruenz durch g^{2n-1}, und verwandelt mit Hülfe der Congruenz $g^k\equiv g_k$, mod. λ, die Exponenten 1, 2, 3, ... $\lambda-2$ in Indices,

so wird aus dieser Congruenz folgende gleichbedeutende:

$$b_0 g_{\lambda-2}^{2n-1} + b_1 + b_2 g_1^{2n-1} + b_3 g_2^{2n-1} + \dots + b_{\lambda-2} g_{\lambda-3}^{2n-1} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Aus der Definition der Coëfficienten b_k, nämlich

$$\lambda b_k = g g_{k-1} - g_k,$$

folgt nun aber unmittelbar, dafs erstens $b_k = 0$ ist, für alle Werthe des g_{k-1}, welche zwischen 0 und $\frac{\lambda}{g}$ liegen; ferner $b_k = 1$ für alle Werthe des g_{k-1}, welche zwischen $\frac{\lambda}{g}$ und $\frac{2\lambda}{g}$ liegen, oder allgemein $b_k = s$ für alle Werthe des g_{k-1}, welche zwischen $\frac{s\lambda}{g}$ und $\frac{(s+1)\lambda}{g}$ liegen. Bezeichnet man durch t_s die gröfste in $\frac{s\lambda}{g}$ enthaltene ganze Zahl, so läfst sich, diejenigen Glieder zusammenfassend, für welche die Coëfficienten b_k gleiche Werthe haben, die obige Congruenz folgendermafsen darstellen:

$$4. \quad \begin{cases} +1((t_1+1)^{2n-1} + (t_1+2)^{2n-1} + \dots + t_2^{2n-1}) \\ +2((t_2+1)^{2n-1} + (t_2+2)^{2n-1} + \dots + t_3^{2n-1}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ +(g-1)((t_{g-1}+1)^{2n-1} + (t_{g-1}+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1}) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda; \end{cases}$$

welches wieder leicht auf folgende Form gebracht wird:

$$5. \quad \begin{cases} (t_1+1)^{2n-1} + (t_1+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1} \\ +(t_2+1)^{2n-1} + (t_2+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ +(t_{g-1}+1)^{2n-1} + (t_{g-1}+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda. \end{cases}$$

Subtrahirt man endlich von jeder einzelnen Zeile dieser Congruenz die Congruenz

$$1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-2} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

und verändert alle Vorzeichen, so ergiebt sich

$$6. \quad \begin{cases} 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + t_1^{2n-1} \\ +1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + t_2^{2n-1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ +1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + t_{g-1}^{2n-1} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda. \end{cases}$$

Ich mache jetzt von folgender bekannten ganzen rationalen Function Gebrauch:

$$7. \quad X(x) = \frac{x^{2n}}{\Pi 2n} - \frac{x^{2n-1}}{2\Pi 2n-1 . \Pi 1} + \frac{B_1 x^{2n-2}}{\Pi 2n-2 . \Pi 2} - \dots \frac{(-1)^n B_{n-1} x^2}{\Pi 2 . \Pi 2n-2};$$

in welcher $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ die *Bernoulli'schen* Zahlen sind und $\Pi r = 1.2.3 \ldots r$ ist. Diese Function $X(x)$ drückt, wenn x eine ganze Zahl ist, die Summe der Reihe $1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \ldots + (x-1)^{2n-1}$ aus, dividirt durch $\Pi(2n-1)$; also läfst sich mittels derselben die Congruenz (6.) folgendermafsen darstellen:

$$8. \quad X(t_1+1)+X(t_2+1)+\ \ldots\ +X(t_{g-1}+1) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Da nun t_s die in $\frac{s\lambda}{g}$ enthaltene gröfste ganze Zahl ist, so kann man

$$t_s = \frac{s\lambda - r_s}{g}$$

setzen, wo r_s positiv und kleiner als g ist. Hierdurch erhält man aus der Congruenz (8.) folgende gleichbedeutende:

$$9. \quad X\left(\frac{\lambda - r_1 + g}{g}\right) + X\left(\frac{2\lambda - r_2 + g}{g}\right) + \ldots + X\left(\frac{(g-1)\lambda - r_{g-1} + g}{g}\right) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Die Zahlen $r_1, r_2, \ldots . r_{g-1}$ fallen, wenn auch in anderer Ordnung, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots . g-1$ zusammen; denn sie liegen alle zwischen 0 und g und sind alle verschieden von einander, weil, wenn $r_k = r_h$ wäre, auch $t_k \equiv t_h$, mod. λ, sein müfste; was unmöglich ist, da t_k und t_h beide kleiner als λ sind. Läfst man nun aus der Congruenz (9.) die Vielfachen des Modul λ weg und setzt statt der Zahlen $r_1, r_2, \ldots . r_{g-1}$ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots . g-1$, so geht diese Congruenz in folgende einfachere über:

$$10. \quad X\left(\frac{1}{g}\right) + X\left(\frac{2}{g}\right) + \ \ldots\ + X\left(\frac{g-1}{g}\right) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda;$$

welche Congruenz zwar Brüche enthält, die aber, da der Modul λ in keinem der Nenner vorkommt, sogleich auf ganze Zahlen gebracht werden können, und also nicht stören.

Die Function $X(x)$ hat unter andern merkwürdigen Eigenschaften auch die, dafs sie sich in folgende unendliche Reihe entwickeln läfst:

$$11. \quad X(x) = \frac{(-1)^n B_n}{\Pi 2n} - \frac{(-1)^n 2}{(2\pi)^{2n}}\left(\frac{\cos 2x\pi}{1^{2n}} + \frac{\cos 4x\pi}{2^{2n}} + \frac{\cos 6x\pi}{3^{2n}} + \ldots\right),$$

gültig in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$. Setzt man in diesem Ausdrucke nach einander $x = 0, \frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots \frac{g-1}{g}$ und addirt (wobei zu bemerken ist, dafs $X(0) = 0$ ist, und dafs im allgemeinen auch die Summe

$$1 + \cos\frac{2k\pi}{g} + \cos\frac{4k\pi}{g} + \ \ldots\ + \cos\frac{2(g-1)k\pi}{g}$$

gleich Null und im Falle, dafs k ein Vielfaches von g ist, gleich g wird): so

erhält man

$$X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n g B_n}{\Pi 2n}-\frac{(-1)^n 2g}{(2\pi)^{2n}}\left(\frac{1.}{g^{2n}}+\frac{1}{(2g)^{2n}}+\frac{1}{(3g)^{2n}}+\ldots \text{ in inf.}\right).$$

Es ist aber bekanntlich

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots \text{ in inf.} = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\Pi 2n},$$

also wird

$$X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)=\frac{(-1)^n g B_n}{\Pi 2n}-\frac{(-1)^n g B_n}{g^{2n}\Pi 2n},$$

und endlich

$$12.\quad X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)=\frac{(-1)^n(g^{2n}-1)B_n}{g^{2n-1}\Pi 2n}.$$

Die Congruenz also, von deren Erfüllung oder Nichterfüllung es abhangt, ob der erste Factor der Classen-Anzahl, nämlich $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$, durch λ theilbar ist, oder nicht, hat nun folgende Gestalt angenommen:

$$13.\quad \frac{(g^{2n}-1)B_n}{g^{2n-1}\Pi 2n} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Der Nenner, als nicht durch den Modul λ theilbar, kann sogleich wegfallen; aufserdem ist aber auch $g^{2n}-1$ nicht durch λ theilbar, für die Werthe $n=1$, $2, 3, \ldots \mu-1$; für diese also geht die Bedingungs-Congruenz einfach in

$$14.\quad B_n \equiv 0, \text{ mod. } \lambda$$

über. Der Fall $n=\mu$ erfordert eine besondere Betrachtung, weil für denselben die Congruenz (13.) die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wegen des in $2^{2\mu}-1$ und ebenfalls im Nenner der μten *Bernoulli*'schen Zahl B_μ enthaltenen Factors λ. Für diesen Fall drücke ich die μte *Bernoulli*'sche Zahl durch die niedrigeren aus, nach der bekannten Formel:

$$B_\mu = \frac{\Pi 2\mu\, B_{\mu-1}}{2^2\Pi 3\,\Pi 2\mu-2}-\frac{\Pi 2\mu\, B_{\mu-2}}{2^4\Pi 5\,\Pi 2\mu-4}+\ldots+\frac{(-1)^\mu}{2^{2\mu}(2\mu+1)}+\frac{(-1)^{\mu+1}}{2^{2\mu}}.$$

In dieser Formel enthält nur das einzige, vorletzte Glied den Factor $2\mu+1=\lambda$ im Nenner; alle übrigen Glieder sind Brüche, in deren Nenner λ als Factor nicht vorkommt. Stellt man sich dieselben alle in einem einzigen Bruche $\frac{M}{N}$ zusammengefafst vor, wo N nicht durch λ theilbar ist, so erhält man

$$B_\mu = \frac{(-1)^\mu}{2^{2\mu}\lambda}+\frac{M}{N}.$$

Setzt man weiter $g^{2\mu}-1 = \lambda K$, wo k nicht weiter durch λ theilbar ist, weil wir schon oben uns vorgesetzt haben, g immer so zu wählen, dafs $g^{\mu}+1$, und also auch $g^{2\mu}-1$, den Factor λ nur ein einzigesmal enthalte: so giebt die Gleichung (12.) für den Fall $n=\mu$:

$$X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ \dots\ +X\left(\frac{g-1}{g}\right) = \frac{(-1)^{\mu}K}{g^{2\mu-1}\Pi 2\mu}\left(\frac{(-1)^{\mu}}{2^{2\mu}}+\frac{\lambda M}{N}\right).$$

Die Congruenz-Bedingung (10.) giebt also in diesem Falle

$$\frac{K}{2^{2\mu}g^{2\mu-1}\Pi 2\mu} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda;$$

und da nun k nicht durch λ theilbar ist, so findet diese Congruenz nicht Statt. Die obige Congruenzbedingung wird also in dem Falle $n=\mu$ niemals erfüllt und es hangt Alles nur davon ab, ob die Congruenz (14.), nämlich $B_n \equiv 0$, mod. λ, für irgend einen der Werthe $n = 1, 2, 3, \dots \mu-1$ Statt hat, oder nicht.

Wir haben demnach als Resultat folgenden Satz:

Der erste Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ der Classen-Anzahl H ist theilbar durch λ, wenn λ eine solche Primzahl ist, welche als Factor des Zählers einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*'schen Zahlen vorkommt: für alle übrigen Primzahlen λ ist dieser Factor nicht durch λ theilbar.

Es ist jetzt ferner für den zweiten Factor der Classen-Anzahl H, nämlich $\frac{D}{\Delta}$, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen derselbe durch λ theilbar sei, und unter welchen nicht. Hierzu ist glücklicherweise die Kenntnifs der in jedem besonderen Falle nur mit äufserster Mühe zu ermittelnden, in Δ enthaltenen Fundamental-Einheiten nicht nöthig, sondern nur die Definition derselben. Hat man ein System von $\mu-1$ *unabhängigen* Einheiten, welche aber im allgemeinen nicht die Fundamental-Einheiten selbst sind, so erhält man aus ihnen alle Einheiten, indem man dieselben zu Potenzen erhebt, deren Exponenten auch rationale Brüche sein können und solche mit einander multiplicirt. Ein solches System unabhängiger Einheiten ist aber das System

$$e(\alpha),\ e(\alpha^{g}),\ e(\alpha^{g^2})\ \dots\ e(\alpha^{g^{\mu-2}}),$$

welches in D enthalten ist. Setzt man also

$$15.\quad \begin{cases} \varepsilon_1(\alpha) = e(\alpha)^{r_1^1}.e(\alpha^{g})^{r_2^1}\ \dots\ e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{r_{\mu-1}^1} \\ \varepsilon_2(\alpha) = e(\alpha)^{r_1^2}.e(\alpha^{g})^{r_2^2}\ \dots\ e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{r_{\mu-1}^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{\mu-1}(\alpha) = e(\alpha)^{r_1^{\mu-1}}.e(\alpha^{g})^{r_2^{\mu-1}}\ \dots\ e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{r_{\mu-1}^{\mu-1}}, \end{cases}$$

wo die gebrochenen Potenz-Exponenten r_h^k mit zwei Indices so zu nehmen sind, dafs $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ wirklich zu ganzen complexen Einheiten werden: so sind diese Einheiten Fundamental-Einheiten, wenn die Determinante der gebrochenen Exponenten, nämlich $\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 \ldots r_{\mu-1}^{\mu-1}$, den möglich-kleinsten Werth hat, aber nicht gleich Null ist. Es mögen nun wirklich die Exponenten r_h^k dieser Bedingung gemäfs bestimmt sein, so dafs $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ wirkliche Fundamental-Einheiten sind, so hat man, wenn die Logarithmen genommen werden:

$$16.\quad l\varepsilon_k(\alpha) = r_1^k le(\alpha) + r_2^k le(\alpha^g) + \ldots + r_{\mu-1}^k le(\alpha^{g^{\mu-2}}).$$

Da nun Δ die Determinante der Gröfsen $l\varepsilon_1(\alpha)$, $l\varepsilon_2(\alpha)$, ... $l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ und derer, welche durch Verwandlung des α in α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\mu-2}}$ aus denselben entstehen, bezeichnet, und eben so D die Determinante der Gröfsen $le(\alpha)$, $le(\alpha^g)$, ... $le(\alpha^{g^{\mu-2}})$ und derer, welche aus diesen entstehen, indem man α in α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\mu-2}}$ verwandelt: so hat man nach einem bekannten Satze über Determinanten:

$$\Delta = D.\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 \ldots r_{\mu-1}^{\mu-1};$$

also

$$17.\quad \frac{D}{\Delta} = \frac{1}{\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 \ldots r_{\mu-1}^{\mu-1}}.$$

Bringt man nun diejenigen rationalen Brüche r_1^k, r_2^k, ... $r_{\mu-1}^k$, welche als Exponenten in einer und derselben Fundamental-Einheit $\varepsilon_k(\alpha)$ vorkommen, unter einen gemeinschaftlichen, und zwar den möglich-kleinsten Nenner, welcher n_k sein mag: so kann man allgemein

$$r_h^k = \frac{m_h^k}{n_k}$$

setzen, wo m_h^k und n_k ganze Zahlen sind, von der Art, dafs n_k nicht mit allen m_1^k, m_2^k, ... $m_{\mu-1}^k$ einen gemeinschaftlichen Factor hat. Hierdurch wird

$$18.\quad \frac{D}{\Delta} = \frac{n_1 n_2 \ldots n_{\mu-1}}{\Sigma \pm m_1^1 m_2^2 \ldots m_{\mu-1}^{\mu-1}}.$$

Es kann also $\frac{D}{\Delta}$ den Factor λ nur dann enthalten, wenn eine der ganzen Zahlen n_1, n_2, ... $n_{\mu-1}$ durch λ theilbar ist, also nur dann, wenn eine Gleichung von folgender Form Statt hat:

$$19.\quad \varepsilon(\alpha)^n = e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2} \ldots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{m_{\mu-1}},$$

in welcher n durch λ theilbar ist, aber $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ nicht alle durch λ theilbar sind. Nun ist aber jede λte Potenz einer ganzen complexen Zahl immer einer realen ganzen Zahl congruent, für den Modul λ, also auch $s(\alpha)^n \equiv c$, mod. λ, wo c eine reale ganze Zahl bedeutet: also mufs

$$20. \quad e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2} \dots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{m_{\mu-1}} \equiv c, \text{ mod. } \lambda,$$

sein, wenn $\frac{D}{\Delta}$ den Factor λ enthalten soll, und wo $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ nicht alle durch λ theilbar sind. Um nun die Bedingung zu erforschen, unter welcher eine solche Congruenz Statt haben kann, mache ich daraus die Gleichung

$$21. \quad e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2} \dots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{m_{\mu-1}} = c + \lambda\varphi(\alpha),$$

in welcher $\varphi(\alpha)$ eine ganze complexe Zahl bedeutet. Eine solche Gleichung unter ganzen complexen Zahlen, welche für jeden Werth des α gilt, der der Gleichung $1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{\lambda-1}=0$ genügt, zieht nach bekannten Principien immer eine für jeden beliebigen Werth das x geltende nach sich, wenn man α in x verwandelt und ein Glied von der Form $(1+x+x^2+\dots+x^{\lambda-1})\psi(x)$ hinzufügt. Demgemäfs erhält man hier die für jeden beliebigen Werth der Variabeln x geltende Gleichung

$$22. \quad e(x)^{m_1}.e(x^g)^{m_2} \dots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{m_{\mu-1}}$$
$$= c + \lambda\varphi(x) + (1+x+x^2+\dots+x^{\lambda-1})\psi(x).$$

Ich nehme jetzt auf beiden Seiten die Differentialquotienten der Logarithmen, wobei $\frac{de(x)}{dx}$ durch $e'(x)$ bezeichnet wird, multiplicire mit x und gebe sodann dem x seinen besonderen Werth $x=\alpha$ zurück: so wird

$$23. \quad m_1 \frac{\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} + m_2 g \frac{\alpha^g e'(\alpha^g)}{e(\alpha^g)} + \dots + m_{\mu-1} g^{\mu-2} \frac{\alpha^{g^{\mu-2}} e'(\alpha^{g^{\mu-2}})}{e(\alpha^{g^{\mu-2}})}$$
$$= \frac{\lambda\alpha\varphi'(\alpha) + (\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\dots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})\psi(\alpha)}{c+\lambda\varphi(\alpha)}.$$

Diese Gleichung enthält nur complexe Einheiten in den Nennern; also wesentlich nur ganze complexe Zahlen. Ich verwandele sie wieder in eine Congruenz für den Modul λ, indem ich die Vielfachen von λ weglasse; dabei bringe ich die complexe Zahl $\psi(\alpha)$ auf die Form $a+(1-\alpha)f(\alpha)$, wo a eine reale ganze Zahl ist, und bemerke, dafs

$$(1-\alpha)(\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\dots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1}) = -\lambda,$$

also

$$(\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\dots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})\psi(\alpha) \equiv (\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\dots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})a$$

für den Modul λ ist. Endlich bestimme ich noch die ganze Zahl M so, dafs $2cM \equiv a$, mod. λ, und setze der Kürze wegen

$$\frac{2\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} = F(\alpha):$$

so ist

$$24. \quad m_1 F(\alpha) + m_2 g F(\alpha^g) + \ldots + m_{\mu-1} g^{\mu-2} F(\alpha^{g^{\mu-2}}) \equiv M(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})$$

für den Modul λ. Ich entwickele jetzt die complexe ganze Zahl $F(\alpha)$. Es ist

$$e(x) = \sqrt{\left(\frac{(1-x^g)(1-x^{-g})}{(1-x)(1-x^{-1})}\right)},$$

also

$$\frac{e'(x)}{e(x)} = \frac{x^{-1}(1+x)}{2(1-x)} - \frac{g x^{-1}(1+x^g)}{2(1-x^g)},$$

und daher

$$F(\alpha) = \frac{2\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{g(1+\alpha^g)}{1-\alpha^g}.$$

Aus der schon oben benutzten Gleichung

$$(1-\alpha)(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1}) = -\lambda$$

folgt nun

$$\frac{1}{1-\alpha} = \frac{-(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})}{\lambda},$$

und wenn mit $1+\alpha$ multiplicirt wird,

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{-(\lambda + 2\alpha + 4\alpha^2 + 6\alpha^3 + \ldots + 2(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})}{\lambda};$$

welches, wenn man statt der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \lambda-1$ in den Coëfficienten die mit diesen, wenn auch in anderer Ordnung zusammenfallenden $1, g, g_2, \ldots \ldots g_{\lambda-2}$, und in den Exponenten statt ihrer die Potenzen $1, g, g^2, \ldots g^{\lambda-2}$ setzt, auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{-(\lambda + 2\alpha + 2g_1\alpha^g + 2g_2\alpha^{g^2} + \ldots + 2g_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}})}{\lambda}.$$

Wird noch α in α^g verwandelt und mit g multiplicirt, so ist auch

$$\frac{g(1+\alpha^g)}{1-\alpha^g} = \frac{-(g\lambda + 2g\alpha^g + 2gg_1\alpha^{g^2} + \ldots + 2gg_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-1}})}{\lambda}.$$

Wird diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt, so erhält man

$$F(\alpha) = g - 1 + \frac{2(gg_{\lambda-2}-1)}{\lambda}\alpha + \frac{2(g-g_1)}{\lambda}\alpha^g + \ldots + \frac{2(gg_{\lambda-3}-g_{\lambda-2})}{\lambda}\alpha^{g^{\lambda-2}}.$$

Dieselben Coëfficienten sind aber schon in dem ersten Theile unserer Unter-

suchung vorgekommen, wo wir sie durch $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{\lambda-2}$ bezeichneten. Werden demnach dieselben Zeichen auch hier angewendet, indem allgemein

$$gg_{k-1} - g_k = \lambda b_k$$

gesetzt wird, so ist

$$25. \quad F(\alpha) = g - 1 + 2b_0\alpha + 2b_1\alpha^g + 2b_2\alpha^{g^2} + \ldots + 2b_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}.$$

Setzt man noch

$$2b_k + 1 - g = c_k$$

und bemerkt, dafs $c_{k+\mu} = -c_k$, weil $b_{k+\mu} + b_k = g - 1$ ist, so nimmt die Entwicklung des $F(\alpha)$ folgende Form an:

$$26. \quad F(\alpha) = c(\alpha - \alpha^{-1}) + c_1(\alpha^g - \alpha^{-g}) + \ldots + c_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-1}} - \alpha^{-g^{\mu-1}}).$$

Werden nun diese Entwicklung und die daraus hervorgehenden von $F(\alpha^g)$, $F(\alpha^{g^2}), \ldots F(\alpha^{g^{\mu-1}})$ in der Congruenz (24.) substituirt, so erhält man aus der Vergleichung der Coëfficienten der einzelnen Glieder folgende μ Congruenzen:

$$27. \quad \begin{cases} m_1 c - m_2 g c_{\mu-1} - m_3 g^2 c_{\mu-2} - \ldots - m_{\mu-1} g^{\mu-2} c_2 \equiv M \\ m_1 c_1 + m_2 g c - m_3 g^2 c_{\mu-1} - \ldots - m_{\mu-1} g^{\mu-2} c_3 \equiv gM \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 c_{\mu-1} + m_2 g c_{\mu-2} + m_3 g^2 c_{\mu-3} + \ldots + m_{\mu-1} g^{\mu-2} c_1 \equiv g^{\mu-1} M. \end{cases}$$

Um M zu eliminiren, multiplicire ich diese Congruenzen der Reihe nach mit $1, g^{2n-1}, g^{2(2n-1)}, \ldots g^{(\mu-1)(2n-1)}$ und addire, so ergiebt sich rechterhand

$$1 + g^{2n} + g^{4n} + \ldots + g^{2(\mu-1)n} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

für jeden der Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots \mu - 1$. Die Seite rechts dieser Congruenz verschwindet also für alle jene Werthe des n: die links aber zerfällt von selbst in das Product zweier Factoren und es wird

$$28. \quad (m_1 + m_2 g^{2n} + m_3 g^{4n} + \ldots + m_{\mu-1} g^{2(\mu-2)n}) \times (c + c_1 g^{2n-1} + c_2 g^{2(2n-1)} + \ldots + c_{\mu-1} g^{(\mu-1)(2n-1)}) \equiv 0;$$

welches die Bedingung ist, die für alle Werthe $n = 1, 2, 2, \ldots \mu - 1$ erfüllt werden mufs, damit $\frac{D}{\Delta}$ den Factor λ enthalten könne. Wenn nun der Factor $c + c_1 g^{2n-1} + c_2 g^{2(2n-1)} + \ldots + c_{\mu-1} g^{(\mu-1)(2n-1)}$ für keinen der Werthe von n durch λ theilbar ist, so mufs der andere Factor für alle Werthe congruent Null sein. Es mufs also folgendes System von Congruenzen Statt haben:

$$29. \quad \left.\begin{cases} m_1 + m_2 g^2 + m_3 g^4 + \ldots + m_{\mu-1} g^{2(\mu-2)} \equiv 0 \\ m_1 + m_2 g^4 + m_3 g^8 + \ldots + m_{\mu-1} g^{4(\mu-2)} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 + m_2 g^{2(\mu-1)} + m_3 g^{4(\mu-1)} + \ldots + m_{\mu-1} g^{(\mu-2)(2\mu-2)} \equiv 0 \end{cases}\right\} \text{mod. } \lambda.$$

Die Determinante dieses Systems linearer Congruenzen ist nicht congruent Null, denn sie ist bekanntlich aus lauter Factoren von der Form $g^{2k}-g^{2h}$ zusammengesetzt, in denen h und k kleiner als $\mu-1$ und von einander verschieden sind: mithin ist keine dieser Congruenzen mit den übrigen identisch, oder schon in denselben enthalten. Diese Congruenzen sind also nicht anders zu erfüllen, als wenn alle die Gröfsen m_1, m_2, ... $m_{\mu-1}$ einzeln congruent Null sind, für den Modul λ; welches gegen die Voraussetzung ist. Es mufs also nothwendig der andere Factor der Congruenz (28.) für irgend einen der Werthe $n=1, 2, 3, \dots \mu-1$ congruent Null sein, wenn $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar sein soll, mithin mufs man

30. $$c+c_1 g^{2n-1}+c_2 g^{2(2n-1)}+\dots+c_{\mu-1} g^{(\mu-1)(2n-1)} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

haben. Vermöge der Gleichung $c_{k+\mu}=-c_k$ und der Congruenz $g^{k+\mu}\equiv -g^k$, mod. λ, kann man auch die Anzahl der Glieder verdoppeln, so dafs

$$c+c_1 g^{2n-1}+c_2 g^{2(2n-1)}+\dots+c_{\lambda-2} g^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0$$

als die Congruenz genommen werden kann, welche nothwendig erfüllt werden mufs, wenn $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar sein soll. Wird zu dieser die Congruenz

$$(g-1)(1+g^{2n-1}+g^{2(2n-1)}+\dots+g^{(\lambda-2)(2n-1)}) \equiv 0$$

addirt und für c_k+g-1 wieder das Zeichen $2b_k$ gesetzt und durch 2 dividirt, so erhält man endlich die Congruenz in der Form

31. $$b_0+b_1 g^{2n-1}+b_2 g^{2(2n-1)}+\dots+b^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Dies ist aber die schon oben vollständig untersuchte Congruenz, welche, wie gezeigt wurde, nur dann Statt hat, wenn λ eine derjenigen Primzahlen ist, die als Factor des Zählers in einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen vorkommen. Das Resultat dieses zweiten Theils unserer Untersuchung ist also folgendes:

> Der zweite Factor $\frac{D}{\Delta}$ der Classen-Anzahl H kann nur dann durch λ theilbar sein, wenn auch der erste Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ durch λ theilbar ist.

Der umgekehrte Satz von diesem ist nicht mitbewiesen und findet, wie ich vermuthe, auch gar nicht Statt. Fassen wir nun das Resultat mit dem vorigen zusammen, so haben wir folgenden Lehrsatz:

> Die Anzahl aller nichtäquivalenten Classen der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten idealen complexen Zahlen ist durch λ theilbar, wenn λ eine solche Primzahl ist, welche als Factor im Zähler einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen vorkommt; dagegen für alle andern Primzahlen λ ist diese Classen-Anzahl nicht durch λ theilbar.

Die zweite Untersuchung, welche ich hier durchführen will, soll die Frage erörtern:

Unter welchen Bedingungen kann eine complexe Einheit einer realen ganzen Zahl congruent sein, für den Modul λ, ohne eine λte Potenz einer andern complexen Einheit zu sein?

Es sei die zu untersuchende Einheit

$$E(\alpha) = \pm\alpha^k e(\alpha)^{\frac{m_1}{n}}.e(\alpha^g)^{\frac{m_2}{n}} \dots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{\frac{m_{\mu-1}}{n}};$$

welche Form alle möglichen Einheiten umfafst. Die Bedingung $E(\alpha)\equiv c$, mod. λ, wo c eine reale ganze Zahl ist, giebt auch $E(\alpha^{-1})\equiv c$, also auch $E(\alpha)\equiv E(\alpha^{-1})$; woraus $\alpha^k = \alpha^{-k}$ folgt. Es mufs demnach $\alpha^k = 1$ sein, und wenn zur $n$ten Potenz erhoben wird, so ergiebt sich, da $E(\alpha)\equiv c$ ist:

$$c^n \equiv \pm e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2} \dots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{m_{\mu-1}}, \text{ mod. } \lambda.$$

Diese Congruenz ist aber mit der obigen, bereits vollständig untersuchten Congruenz (20.) vollkommen identisch, und wir wissen, dafs wenn λ eine Primzahl ist, welche in den Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor nicht vorkommt, eine solche Congruenz nicht bestehen kann, ohne dafs $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ alle durch λ theilbar sind. In diesem Falle ist also $E(\alpha)^n$ gleich einer λten Potenz einer Einheit, und n ist nicht theilbar durch λ, indem der Nenner n nicht mit allen Zählern $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ einen gemeinschaftlichen Factor haben soll. Wenn aber $E(\alpha)^n$ gleich einer λten Potenz und n nicht durch λ theilbar sein soll, so folgt leicht, dafs auch $E(\alpha)$ eine λte Potenz sein mufs. Bestimmt man nämlich die beiden Zahlen s und t so, dafs $ns-\lambda t = 1$ ist und erhebt $E(\alpha)^n$ zur $s$ten Potenz, so ist auch $E(\alpha)^{ns} = E(\alpha)^{\lambda t+1} = E(\alpha)^{\lambda t}.E(\alpha)$ gleich einer λten Potenz einer Einheit. Es ist also folgender Lehrsatz bewiesen:

Wenn λ eine Primzahl ist, welche in keiner der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor des Zählers vorkommt, so ist jede aus λten Wurzeln der Einheit gebildete complexe Einheit, welche einer realen ganzen Zahl congruent ist, für den Modul λ, eine λte Potenz einer andern complexen Einheit.

Hiermit ist die aufgestellte Frage genügend beantwortet; denn, zu untersuchen, in wie weit auch die Umkehrung dieses Satzes richtig sei, liegt aufser unserem Zwecke.

Aus diesen Untersuchungen geht hervor, dafs die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihren tiefer liegenden Eigenschaften nicht unwesentliche Unterschiede haben, je nachdem λ eine Primzahl ist, welche in dem Zähler einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor vorkommt, oder nicht; welche Unterschiede ich auch noch bei andern Untersuchungen über diese complexen Zahlen wahrzunehmen Gelegenheit gehabt habe. Aus den bekannten Zahlenwerthen der ersten *Bernoulli*schen Zahlen habe ich alle Primzahlen bis $\lambda=43$ in dieser Beziehung geprüft, und gefunden, dafs unter denselben nur eine ist, welche im Zähler der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor vorkommt, nämlich $\lambda=37$, da 37 ein Factor des Zählers der 16ten *Bernoulli*schen Zahl ist, während die Primzahlen $\lambda=3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43$ diese Eigenschaft nicht haben. Überhaupt scheint in der Reihe aller Primzahlen jene besondere Art ziemlich sparsam vertheilt zu sein, so dafs dieselbe füglich nur als Ausnahme zu behandeln sein möchte.

Breslau, den 18ten Juni 1849.

8.

Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes, dafs die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potenz-Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ Bernoullischen Zahlen als Factoren nicht vorkommen.

(Von Herrn *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

In den vorhergehenden Abhandlungen haben wir die Theorie der complexen Zahlen bis zu dem Puncte geführt, dafs mit Hülfe derselben der Beweis dieses Fermatschen Satzes, wenn gleich noch nicht vollkommen allgemein, so doch für alle diejenigen Potenzen, deren Exponenten die in der Überschrift bezeichnete Bedingung erfüllen, leicht und sicher geführt werden kann. Da es hierbei wenig Unterschied macht, ob man x, y, z nur als reale ganze Zahlen, oder, allgemeiner, als complexe, aus λten Wurzeln der Einheit gebildete Zahlen annimmt, so wollen wir den Beweis sogleich für complexe Zahlen geben. Die zu untersuchende Gleichung sei demnach

$$1. \quad u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0;$$

wo u, v und w wirkliche complexe Zahlen bezeichnen. Ferner sei λ eine Primzahl, welche in keiner der ersten $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ Bernoullischen Zahlen als Factor des Zählers vorkommt. Unter dieser Voraussetzung haben die hier vorkommenden complexen Zahlen nach den in der vorhergehenden Abhandlung bewiesenen Sätzen, erstens, die Eigenschaft, dafs die Anzahl aller nicht-äquivalenten Classen nicht durch λ theilbar ist; woraus wir sogleich die für den folgenden Beweis bemerkenswerthe Folgerung ziehen, dafs hier niemals eine λte Potenz einer *idealen* complexen Zahl zu einer wirklichen werden kann, oder dafs, wenn eine λte Potenz einer complexen Zahl gleich einer *wirklichen* ist, diese complexe Zahl selbst eine wirkliche sein mufs (Man sehe die Abhandlung No. 16. Band 35. S. 356 dieses Journals). Zweitens ist bei dieser Voraussetzung, nach dem letzten Satze der vorhergehenden Abhandlung, jede complexe Einheit, welche für den Modul λ einer realen ganzen Zahl con-

gruent wird, stets eine λte Potenz einer andern Einheit. Dafs die complexen Zahlen u, v und w so angenommen werden, dafs sie nicht alle drei einen gemeinschaftlichen Factor haben und dafs darum auch nicht zwei derselben einen gemeinschaftlichen Factor haben dürfen, versteht sich von selbst.

Der Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung (1.) zerfällt nun in zwei Theile, deren erster den Fall betrifft, wo von den drei complexen Zahlen u, v und w keine den Factor $1-\alpha$ hat, der zweite aber den Fall, wo eine derselben durch $1-\alpha$ theilbar ist.

Es sei erstens in der Gleichung

$$u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda = 0$$

keine der complexen Zahlen u, v, w durch $1-\alpha$ theilbar. Da in der gegebenen Gleichung nur die λten Potenzen von u, v, w vorkommen, so kann man diese complexen Zahlen mit beliebigen λten Wurzeln der Einheit multipliciren; man kann also $\alpha^h u$ statt u setzen, wo h eine beliebige ganze Zahl ist, welche sich, wie leicht zu zeigen, immer so bestimmen läfst, dafs $\alpha^h u$ die Form $a+(1-\alpha)^2 P$ erhält; wo a eine reale ganze Zahl und P eine complexe ganze Zahl ist. Dieselbe Form kann auch dem v und w gegeben werden. Es sollen deshalb hier überall für u, v und w folgende Formen angenommen werden:

$$2. \quad \begin{cases} u = a+(1-\alpha)^2 P \\ v = b+(1-\alpha)^2 Q \\ w = c+(1-\alpha)^2 R. \end{cases}$$

Die realen ganzen Zahlen a, b, c sind wegen der Voraussetzung, dafs u, v, w nicht durch $1-\alpha$ theilbar sein sollen, nicht durch λ theilbar. Ich zerlege nun die Form $u^\lambda+v^\lambda$ in ihre Factoren und erhalte so aus der Gleichung $u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$ folgende:

$$3. \quad (u+v)(u+\alpha v)(u+\alpha^2 v)\ \ldots\ (u+\alpha^{\lambda-1}v) = -w^\lambda.$$

Diese λ Factoren haben keinen gemeinschaftlichen Theiler: denn hätten $u+\alpha^r v$ und $u+\alpha^s v$ einen solchen, so müfsten auch $(\alpha^r-\alpha^s)u$ und $(\alpha^r-\alpha^s)v$ denselben Theiler haben, und da u und v relative Primzahlen sind, so könnte nur $\alpha^r-\alpha^s$ der gemeinschaftliche Theiler sein. Es ist aber $\alpha^r-\alpha^s$ gleich $1-\alpha$, multiplicirt mit einer complexen Einheit, und dieses kann nicht Theiler eines jener λ Factoren sein, weil sonst, gegen die Annahme, auch w^λ und folglich auch w durch $1-\alpha$ theilbar sein müfste. Da nun alle diese Factoren auf der Seite links der Gleichung (3.) relative Primzahlen sind und ihr

Product gleich einer λten Potenz ist, so müssen sie alle einzeln gleich λten Potenzen gewisser idealen complexen Zahlen sein, multiplicirt mit irgend welchen complexen Einheiten. Es folgt dies unmittelbar, eben so wie für gewöhnliche ganze Zahlen, aus dem in der Abhandlung No. 16. Band. 35. pag. 348 bewiesenen Satze, dafs, abgesehen von den Einheiten, welche als Factoren zutreten können, jede complexe Zahl sich nur auf eine einzige bestimmte Weise als Product ihrer idealen Primfactoren darstellen läfst. Man erhält daher allgemein für alle Werthe $r=0, 1, 2, \dots \lambda-1$:

$$4. \quad u+\alpha^r v = \alpha^\varrho E_r(\alpha).t_r^\lambda;$$

wo t_r eine complexe Zahl ist, Factor von w, und $\alpha^\varrho E_r(\alpha)$ eine Einheit, von der Art, dafs $E_r(\alpha)=E_r(\alpha^{-1})$ ist. In zwei Factoren, α^ϱ und $E_r(\alpha)$, deren einer nur eine λte Wurzel der Einheit ist, der andere die Eigenschaft hat, bei der Verwandlung des α in α^{-1} ungeändert zu bleiben, läfst sich nämlich, wie bekannt, jede beliebige complexe Einheit zerlegen. Da nach Gleichung (4.) t_r^λ gleich einer wirklichen complexen Zahl ist, so schliefsen wir sogleich, nach Dem, was oben gezeigt, dafs auch t_r selbst eine wirkliche complexe Zahl sein mufs; und da jede λte Potenz einer wirklichen complexen Zahl bekanntlich einer realen ganzen Zahl congruent ist, für den Modul λ, so setze ich $t_r^\lambda \equiv m$, mod. λ; wo m eine reale ganze Zahl ist. Die Gleichung (4.) geht dadurch in die Congruenz

$$5. \quad u+\alpha^r v \equiv \alpha^\varrho.E_r(\alpha)m, \text{ mod. } \lambda,$$

über. Wird nun α in α^{-1} verwandelt, wodurch u in u', v in v', w in w' übergehen mag, so ist

$$6. \quad u'+\alpha^{-r}v' \equiv \alpha^{-\varrho}E_r(\alpha)m, \text{ mod. } \lambda;$$

aus welchen beiden Congruenzen durch Elimination des m

$$7. \quad \alpha^{-\varrho}(u+\alpha^r v) \equiv \alpha^\varrho(u'+\alpha^{-r}v'), \text{ mod. } \lambda,$$

folgt. Nimmt man statt des Moduls λ den Modul $(1-\alpha)^2$, welcher ein Divisor von λ ist, und bemerkt, dafs nach den Gleichungen (2.) $u\equiv a$, $v\equiv b$, $u'\equiv a$, $v'\equiv b$, für den Modul $(1-\alpha)^2$ ist, so erhält man

$$8. \quad \alpha^{-\varrho}(a+\alpha^r b) \equiv \alpha^\varrho(a+\alpha^{-r}b), \text{ mod. } (1-\alpha)^2,$$

und da allgemein $\alpha^h\equiv 1-h(1-\alpha)$, mod. $(1-\alpha)^2$, ist, so geht diese Congruenz in die folgende über:

$$2(a+b)\varrho \equiv 2br, \text{ mod. } (1-\alpha).$$

Da nun reale ganze Zahlen, welche durch $1-\alpha$ theilbar sind, auch durch λ

theilbar sein müssen, so ist

$$9.\quad (a+b)\varrho \equiv br, \text{ mod. } \lambda.$$

Nennt man nun k diejenige ganze Zahl, welche der Congruenz

$$10.\quad (a+b)k \equiv b, \text{ mod. } \lambda,$$

genügt, so ist k von r unabhängig und $\varrho \equiv k.r$, also giebt die Congruenz (7.)

$$11.\quad \alpha^{-kr}(u+\alpha^r v) \equiv \alpha^{+kr}(u'+\alpha^{-r}v'), \text{ mod. } \lambda.$$

Für den besondern Fall $r=0$ hat man, da $a+b$ nicht $\equiv 0$, mod. λ, sein kann, aus der Congruenz (9.): $\varrho \equiv 0$, mod. λ, also

$$12.\quad u+v \equiv u'+v', \text{ mod. } \lambda,$$

und da u, v, w in der gegebenen Gleichung $u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$ beliebig vertauscht werden können, so ist auch

$$13.\quad \left.\begin{cases} u+w \equiv u'+w' \\ v+w \equiv v'+w' \end{cases}\right\} \text{ mod. } \lambda,$$

und aus diesen Congruenzen folgen die drei einfacheren:

$$14.\quad \left.\begin{cases} u \equiv u' \\ v \equiv v' \\ w \equiv w' \end{cases}\right\} \text{ mod. } \lambda.$$

Hiernach verwandelt sich die für jeden beliebigen Werth von r geltende Congruenz (11.) in folgende:

$$15.\quad \alpha^{-kr}(u+\alpha^r v) \equiv \alpha^{kr}(u+\alpha^{-r}v), \text{ mod. } \lambda,$$

oder in

$$u(\alpha^{kr}-\alpha^{-kr})+v(\alpha^{(k-1)r}-\alpha^{-(k-1)r}) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Ich setze $r=1$ und $r=2$, und erhalte dadurch:

$$16.\quad \left.\begin{cases} u(\alpha^k-\alpha^{-k})+v(\alpha^{(k-1)}-\alpha^{-(k-1)}) \equiv 0, \\ u(\alpha^{2k}-\alpha^{-2k})+v(\alpha^{2(k-1)}-\alpha^{-2(k-1)}) \equiv 0, \end{cases}\right\} \text{ mod. } \lambda,$$

und wenn die erste dieser beiden Congruenzen mit $\alpha^k+\alpha^{-k}$ multiplicirt und die zweite davon abgezogen wird, so ist nach Weghebung des gemeinschaftlichen Factors v, welcher nicht durch $1-\alpha$ theilbar, also zu λ relative Primzahl ist,

$$(\alpha^k+\alpha^{-k})(\alpha^{(k-1)}-\alpha^{-(k-1)})+(\alpha^{2(k-1)}-\alpha^{-2(k-1)}) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

also

$$(\alpha^{k-1}-\alpha^{-(k-1)})(\alpha^k+\alpha^{-k}-\alpha^{k-1}-\alpha^{-(k-1)}) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

folglich

$$17.\quad (\alpha^{k-1}-\alpha^{-(k-1)})(\alpha^{-k}-\alpha^{k-1})(1-\alpha) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Wenn nun keiner dieser drei Factoren für sich gleich Null ist, so enthält das Product derselben den Factor $1-\alpha$ dreimal: es müfste denselben aber ebensovielmal enthalten als λ, also $\lambda-1$ mal, damit die Congruenz wirklich Statt habe. Mit Ausschlufs des einzigen Falles $\lambda=3$ kann also diese Congruenz (17.) nicht Statt finden, wenn nicht

$$18. \quad \begin{cases} \text{entweder} & \alpha^{k-1}-\alpha^{-(k-1)} = 0, \\ \text{oder} & \alpha^{-k}-\alpha^{k-1} = 0 \end{cases}$$

ist. Es mufs also entweder $k\equiv 1$, oder $2k\equiv 1$, mod. λ, sein. Der erste Fall $k\equiv 1$ würde aber der Congruenz (10.) zufolge $a\equiv 0$, mod. λ, geben, und kann deshalb nicht Statt haben. Der zweite Fall $2k\equiv 1$ giebt der Congruenz (10.) zufolge $a\equiv b$, mod. λ, woraus durch blofse Vertauschung der Buchstaben folgt, dafs auch $a\equiv c$ und $b\equiv c$, mod. λ, sein mufs. Aus der Gleichung $u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$ folgt aber, nach den bei (2.) angenommenen Ausdrücken von u, v und w, dafs auch $a^\lambda+b^\lambda+c^\lambda\equiv 0$, mod. λ, sein mufs, also auch $a+b+c\equiv 0$, mod. λ, und da a, b und c congruent sind, endlich $3a\equiv 0$, mod. λ, welches, mit Ausnahme des schon oben ausgeschlossenen Falles $\lambda=3$, ebenfalls unmöglich ist, weil nach der Voraussetzung u den Factor $1-\alpha$ nicht enthalten und also auch a nicht durch λ theilbar sein darf. Hiermit ist nun der erste Theil des Beweises vollständig gegeben, indem gezeigt worden ist, dafs die Gleichung $u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$, wenn keine der complexen Zahlen u, v und w den Factor $1-\alpha$ enthält, immer eine unmögliche Congruenz für den Modul λ nach sich zieht; mit Ausnahme des Falles $\lambda=3$, welchen wir hier nicht besonders betrachten wollen.

Es sei zweitens in der Gleichung $u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$ eine der drei Zahlen u, v, w durch $1-\alpha$ theilbar; zu welcher w genommen werden soll. Dieselbe kann den Factor $1-\alpha$ auch mehrmals enthalten. Setzt man daher $(1-\alpha)^m w$ statt w, so dafs nun w den Factor $1-\alpha$ nicht weiter enthält, so ist die zu untersuchende Gleichung:

$$u^\lambda+v^\lambda+(1-\alpha)^{m\lambda}.w^\lambda = 0.$$

Statt dieser aber setze ich die etwas allgemeinere

$$19. \quad u^\lambda+v^\lambda = E(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda}.w^\lambda,$$

in welcher $E(\alpha)$ eine beliebige complexe Einheit bezeichnet. Durch Zerlegung des Ausdrucks $u^\lambda+v^\lambda$ in Factoren erhält man

$$20. \quad (u+v)(u+\alpha v)(u+\alpha^2 v)\ldots(u+\alpha^{\lambda-1}v) = E(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda}.w^\lambda.$$

Die λ Factoren $u+v$, $u+\alpha v$, u. s. w. haben hier alle den gemeinschaftlichen gröfsten Factor $1-\alpha$; aufser diesem haben je zwei derselben keinen gemeinschaftlichen Theiler. Nimmt man nämlich für u und v wieder, wie oben, die Formen $u = a+(1-\alpha)^2 P$ und $v = b+(1-\alpha)^2 Q$ an, so erhält man

$$21. \quad u+\alpha^r v = a+b-rb(1-\alpha), \text{ mod.} (1-\alpha)^2;$$

es mufs aber $u+\alpha^r v$ wenigstens für einen Werth von r durch $1-\alpha$ theilbar sein, weil das Product aller dieser Factoren durch $(1-\alpha)^{m\lambda}$ theilbar ist: also mufs $a+b$ durch $1-\alpha$, folglich auch durch λ theilbar sein, und die Congruenz (21.) verwandelt sich in

$$22. \quad u+\alpha^r v \equiv rb(1-\alpha), \text{ mod.} (1-\alpha)^2;$$

woraus zunächst folgt, dafs für jeden Werth von r, $u+\alpha^r v$ den Factor $1-\alpha$ enthalten mufs, statt dessen auch der Factor $1-\alpha^r$ genommen werden kann, welcher sich von diesem nur durch eine complexe Einheit unterscheidet, die als Factor hinzutritt: ferner, dafs $u+\alpha^r v$ diesen Factor $1-\alpha^r$ oder $1-\alpha$ nur einmal enthalten kann, mit Ausnahme des Falles $r=0$. Die Gröfse $u+v$ aber enthält wirklich den Factor $1-\alpha$ mehrmals, und zwar vermöge der Gleichung (20.) genau $m\lambda-\lambda+1$ mal, indem die übrigen $\lambda-1$ Factoren ihn jeder einmal enthalten und das Product aller $m\lambda$ mal. Setzt man nun

$$23. \quad u+v = (1-\alpha)^{m\lambda-\lambda+1}.\varphi$$

und

$$24. \quad u+\alpha^r v = (1-\alpha^r)\varphi_r,$$

so geht die Gleichung (20.) in folgende über:

$$25. \quad \varphi.\varphi_1.\varphi_2 \ldots \varphi_{\lambda-1} = E(\alpha) w^\lambda$$

und es müssen nun die Factoren φ, φ_1, φ_2, ... $\varphi_{\lambda-1}$, welche unter sich alle relative Primzahlen sind und deren Product gleich einer mit einer Einheit multiplicirten λten Potenz ist, alle einzeln ebenfalls solche mit Einheiten multiplicirte λte Potenzen sein. Demnach kann man setzen:

$$\varphi = e(\alpha) w_1^\lambda \text{ und } \varphi_r = e_r(\alpha) t_r^\lambda,$$

woraus

$$26. \quad u+v = e(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda-\lambda+1}.w_1^\lambda$$

und

$$27. \quad u+\alpha^r v = e_r(\alpha)(1-\alpha^r) t_r^\lambda$$

für alle Werthe $r = 1, 2, 3, \ldots \lambda-1$ folgt. Die complexen Zahlen w_1 und t_r sind hier ebenfalls nur wirkliche complexe Zahlen, weil die λten Potenzen

derselben wirkliche complexe Zahlen sind. Giebt man dem r einen andern Werth s, so erhält man ebenfalls

$$28.\quad u+\alpha^s v = e_s(\alpha)(1-\alpha^s).t_s^\lambda,$$

und wenn man aus diesen drei Gleichungen u und v eliminirt, so erhält man

$$29.\quad e_r(\alpha)t_r^\lambda - e_s(\alpha)t_s^\lambda = \frac{e(\alpha^r-\alpha^s)(1-\alpha)}{(1-\alpha^r)(1-\alpha^s)}(1-\alpha)^{(m-1)\lambda}.w_1^\lambda.$$

Dividirt man durch $e_r(\alpha)$ und setzt

$$\frac{-e_s(\alpha)}{e_r(\alpha)} = \varepsilon(\alpha) \text{ und}$$

$$\frac{e(\alpha)(\alpha^r-\alpha^s)(1-\alpha)}{e_r(\alpha)(1-\alpha^r)(1-\alpha^s)} = E_1(\alpha),$$

wo $\varepsilon(\alpha)$ und $E_1(\alpha)$ ebenfalls nur complexe Einheiten sind, so ergiebt sich

$$30.\quad t_r^\lambda+\varepsilon(\alpha)t_s^\lambda = E_1(\alpha)(1-\alpha)^{(m-1)\lambda}.w_1^\lambda.$$

Ist nun $m>1$, so ist bekanntlich $(1-\alpha)^{(m-1)\lambda}\equiv 0$, mod. λ. Ferner, da t_r und t_s wirkliche complexe Zahlen sind, so müssen die λten Potenzen derselben realen ganzen Zahlen congruent sein für den Modul λ, also mufs $t_r^\lambda\equiv c$ und $t_s^\lambda\equiv k$, mod. λ, sein. Die Gleichung (30.) giebt daher folgende Congruenz:

$$c+\varepsilon(\alpha)k \equiv 0,\ \text{mod.}\ \lambda,$$

aus welcher folgt, dafs die Einheit $\varepsilon(\alpha)$ einer realen ganzen Zahl congruent ist, für den Modul λ, dafs also $\varepsilon(\alpha)$ eine λte Potenz einer andern Einheit sein mufs, mithin $\varepsilon(\alpha)=\varepsilon_1(\alpha)^\lambda$. Setzt man nun $\varepsilon_1(\alpha)t_s=v_1$ und statt t_r das Zeichen u_1, so geht die Gleichung (30.) in folgende über:

$$31.\quad u_1^\lambda+v_1^\lambda = E_1(\alpha)(1-\alpha)^{(m-1)\lambda}.w_1^\lambda.$$

Diese Gleichung ist aber der Form nach der Gleichung (19.), aus welcher sie abgeleitet ist, vollkommen gleich und unterscheidet sich von ihr nur dadurch, dafs m um eine Einheit kleiner ist. Wendet man also auf die Gleichung (31.) dieselbe Methode an, so erhält man aus ihr wieder eine Gleichung von derselben Form, in welcher m um zwei Einheiten kleiner ist, als in der Gleichung (19.) u. s. w. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man stets zu einer Gleichung von derselben Form wie (19.), in welcher $m=1$ ist: auf diese aber ist sodann die Methode, welche, wie wir oben ausdrücklich bemerkt haben, $m>1$ voraussetzt, nicht weiter anwendbar. Man erhält also eine Gleichung von der Form

$$32.\quad u^\lambda+v^\lambda = E(\alpha).(1-\alpha)^\lambda.w^\lambda.$$

Die Unmöglichkeit dieser Gleichung läfst sich einfach dadurch beweisen, dafs gezeigt wird: die Form $u^\lambda+v^\lambda$, wenn sie überhaupt den Factor $1-\alpha$ enthält, müsse denselben wenigstens $\lambda+1$ mal enthalten. Um dies zu beweisen, setze ich für u und v wieder wie oben die Formen

$$u = a+(1-\alpha)^2 P, \quad v = b+(1-\alpha)^2 Q,$$

so ergiebt sich wieder

$$33. \quad u+\alpha^r v \equiv a+b-rb(1-\alpha), \text{ mod. } (1-\alpha)^2.$$

Da nun $u^\lambda+v^\lambda$ durch $1-\alpha$ theilbar ist und deshalb auch wenigstens einer der Factoren dieses Ausdrucks, welche alle die Form $u+\alpha^r v$ haben, durch $1-\alpha$ theilbar sein mufs, so folgt, dafs $a+b$ durch $1-\alpha$ und deshalb auch durch λ theilbar ist. Die Congruenz (33.) geht demnach, eben so wie oben, in folgende über:

$$34. \quad u+\alpha^r v \equiv rb(1-\alpha), \text{ mod. } (1-\alpha)^2.$$

Für $r=0$ ist insbesondere

$$35. \quad u+v \equiv 0, \text{ mod. } (1-\alpha)^2.$$

Es sind also alle die Factoren der Form

$$u^\lambda+v^\lambda = (u+v)(u+\alpha v)(u+\alpha^2 v) \;\ldots\; (u+\alpha^{\lambda-1}v)$$

durch $1-\alpha$ theilbar; der Factor $u+v$ aber ist durch $(1-\alpha)^2$ theilbar. Die Anzahl aller in $u^\lambda+v^\lambda$ enthaltenen Factoren $1-\alpha$ ist demnach mindestens gleich $\lambda+1$; was zu beweisen war. Die Gleichung (32.), in welcher w nicht durch $1-\alpha$ theilbar ist, enthält also den Widerspruch in sich, dafs die Seite derselben links durch $(1-\alpha)^{\lambda+1}$ theilbar ist, die rechts aber nicht. Diese Gleichung ist also eine unmögliche, und darum ist auch die Gleichung (19.), aus welcher sie abgeleitet wurde, unmöglich: d. h. eine solche, welche durch complexe ganze Zahlen auf keine Weise erfüllt werden kann.

Die Gleichung $u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$ ist also in beiden Fällen unmöglich, sowohl wenn keine der complexen Zahlen u, v, w durch $1-\alpha$ theilbar ist, als auch wenn eine derselben durch $1-\alpha$ theilbar angenommen wird. Der *Fermat*sche Satz ist demnach nicht nur für reale ganze Zahlen, sondern sogar für complexe, aus λten Wurzeln der Einheit gebildete ganze Zahlen bewiesen, für alle diejenigen Potenzen, deren Exponenten λ Primzahlen sind und welche die Bedingung erfüllen, dafs sie in keiner der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen

Zahlen als Factoren des Zählers vorkommen. Da $\lambda = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43$ diese Bedingung erfüllen, so ist namentlich für alle diese der *Fermat*sche Satz bewiesen. Für $\lambda = 37$ aber, wird die angegebene Bedingung nicht erfüllt: also ist auch der *Fermat*sche Satz für 37te Potenzen nicht bewiesen. Meine gegenwärtigen Kenntnisse der Theorie der complexen Zahlen haben mir auch noch nicht die Mittel gewährt, für $\lambda = 37$ und für die übrigen Primzahlen, welche der angegebenen Bedingung nicht genügen, die Nicht-Auflösbarkeit oder Auflösbarkeit der *Fermat*schen Gleichung zu ergründen.

Breslau, den 19ten Juni 1849.

9.

Transformation d'une intégrale définie.

(Par Mr. *R. Hoppe* à Keilhau près Rudolstadt.)

En intégrant par parties, on trouve

$$\int x^m \cos hx\,\partial x = -\frac{1}{h}x^m\cos(hx+\tfrac{1}{2}\pi)+\frac{m}{h}\int x^{m-1}\cos(hx+\tfrac{1}{2}\pi)\,\partial x.$$

En continuant la réduction jusqu'à ce que la puissance de x disparait de l'intégrale, on parvient à l'expression suivante:

$$\int x^m \cos hx\,\partial x = -\sum_{k=0}^{k=m}\frac{1.2\ldots k m_k}{h^{k+1}}x^{m-k}\cos(hx+\tfrac{1}{2}(k+1)\pi).$$

Pour $x=0$ le second nombre s'évanouit, excepté son dernier terme, qui a la même valeur pour $x=0$ et pour $x=2n\pi$; donc on a

$$\int_0^{2n\pi} x^m \cos hx\,\partial x = -\sum_{k=0}^{k=m-1}\frac{1.2\ldots k m_k}{h^{k+1}}(2n\pi)^{m-k}\cos\tfrac{1}{2}(k+1)\pi.$$

Or on sait que

$$l(1-2a\cos x+a^2) = -2\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{a^h}{h}\cos hx.$$

En multipliant cette équation par $x^m\partial x$, et en intégrant suivant notre formule, on obtient (en désignant $l(1-2a\cos x+a^2)$ par L):

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = 2\sum_{k=0}^{k=m-1}1.2\ldots k m_k(2n\pi)^{m-k}\cos\tfrac{1}{2}(k+1)\pi\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{a^h}{h^{k+2}}.$$

Or on a

$$\frac{1}{h^{k+2}} = \frac{1}{\Gamma(k+2)}\int_0^\infty x^{k+1}e^{-hx}\,\partial x,$$

donc

$$1.2\ldots k\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{a^h}{h^{k+2}} = \frac{1}{k+1}\int_0^\infty x^{k+1}\partial x\sum_{h=1}^{h=\infty}(ae^{-x})^h = \frac{a}{k+1}\int_0^\infty\frac{x^{k+1}\partial x}{e^x-a}$$

sous condition que $a^2 \overline{\lessgtr} 1$. En substituant cette valeur, et ayant attention que

$$m_k = \frac{k+1}{m+1}(m+1)_{k+1},$$

on obtient

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = \frac{2a}{m+1}\int_0^\infty\frac{\partial x}{e^x-a}\sum_{k=0}^{k=m-1}(m+1)_{k+1}(2n\pi)^{m-k}x^{k-1}\cos\tfrac{1}{2}(k+1)\pi.$$

Posons $k-1$ au lieu de k, et écrivons $\cos\frac{1}{2}(k\pi)$ en forme imaginaire: l'équation deviendra

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = \frac{a(2n\pi)^{m+1}}{m+1}\int_0^\infty \frac{\partial x}{e^x-a}\sum_{k=1}^{k=m}(m+1)_k\left(\frac{x}{2n\pi}\right)^k\{e^{\frac{1}{2}(ik\pi)}+e^{-\frac{1}{2}(ik\pi)}\}.$$

Cette somme est ce que donne la quantité

$$\left(1+\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}+\left(1-\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}$$

lorsqu'on la développe d'après le binome, en soustrayant les deux termes extrêmes, savoir

$$2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}+\left(-\frac{ix}{2n\pi}\right)^{m+1}.$$

Donc, en la remplaçant par cette expression, on a

$$\int_0^{2n\pi} x^m L\,\partial x = \frac{a}{m+1}\int_0^\infty \frac{\partial x}{e^x-a}\{(2n\pi+ix)^{m+1}+(2n\pi-ix)^{m+1}-2(2n\pi)^{m+1} \\ -(ix)^{m+1}-(-ix)^{m+1}\}.$$

Soit $f(x)$ une fonction développable suivant la série de ***Maclaurin*** pour toute valeur de x. Multiplions l'équation par

$$\frac{1}{1.2\ldots m}f^{m+1}(0),$$

posons $m=0,1,2,\ldots\infty$, et prenons la somme des équations obtenues: il viendra

$$\int_0^{2n\pi} f'(x)L\,\partial x = a\int_0^\infty \frac{\partial x}{e^x-a}\{f(2n\pi+ix)+f(2n\pi-ix)-2f(2n\pi) \\ -f(ix)-f(-ix)+2f(0)\}.$$

Bien que la généralité de cette formule subit une restriction, qui exclut de son application la plupart des fonctions les plus usitées, elle fournit les moyens de transformer l'intégrale dont il s'agit en beaucoup de cas, où la fonction f ne remplit pas la condition, sur laquelle la déduction est fondée. Il suffira d'en donner un exemple. Pour $f(x)=e^{-cx}$ la formule donne l'équation suivante:

$$\int_0^{2n\pi} e^{-cx}L\,\partial x = -\frac{2a}{c}(1-e^{-2n\pi c})\int_0^\infty \frac{1-\cos cx}{e^x-a}\partial x.$$

Multiplions-la par $\sin bc\,\partial c$, et intégrons par rapport à c, depuis 0 jusqu'à ∞, eu ayant égard que

$$\int_0^\infty e^{-cx}\sin bc\,\partial c = \frac{b}{b^2+x^2},$$

il viendra

$$b\int_0^{2n\pi}\frac{L\partial x}{b^2+x^2} = 2a\int_0^\infty\frac{\partial x}{e^x-a}\int_0^\infty(e^{-2n\pi c}-1)\sin bc(1-\cos cx)\frac{\partial c}{c}.$$

Si l'on décompose le facteur $2\sin bc(1-\cos cx)$ dans les parties $2\sin bc - \sin(x+b)c + \sin(x-b)c$, il y aura à évaluer les six intégrales suivantes:

$$2\int_0^\infty e^{-2n\pi c}\sin bc\frac{\partial c}{c} = 2\int_0^b\partial b\int_0^\infty e^{-2n\pi c}\cos bc\,\partial c$$

$$= 2\int_0^b\frac{2n\pi\,\partial b}{4n^2\pi^2+b^2} = 2\,\text{arc tang}\frac{b}{2n\pi},$$

$$\int_0^\infty e^{-2n\pi c}\sin(x\pm b)\frac{\partial c}{c} = \text{arc tang}\frac{x\pm b}{2n\pi},$$

$$2\int_0^\infty\sin bc\frac{\partial c}{c} = \pi,$$

$$\int_0^\infty\sin(x+b)c\frac{\partial c}{c} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\infty\sin(x-b)c\frac{\partial c}{c} = -\tfrac{1}{2}\pi+\begin{cases}0 & (x<b)\\ \pi & (x>b),\end{cases}$$

où partout on suppose $b>0$. Ces valeurs étant substituées, l'équation devient

$$\int_0^{2n\pi}\frac{L\partial x}{b^2+x^2} = \frac{a}{b}\int_0^\infty\frac{\partial x}{e^x-a}\left\{2\,\text{arc tang}\frac{b}{2n\pi}-\text{arc tang}\frac{x+b}{2n\pi}+\text{arc tang}\frac{x-b}{2n\pi}\right\}$$
$$-\frac{a\pi}{b}\int_b^\infty\frac{\partial x}{e^x-a},$$

où

$$\int_b^\infty\frac{\partial x}{e^x-a} = -\frac{1}{a}l(1-ae^{-b}).$$

Pour $n=\infty$ on obtient l'intégrale connue

$$\int_0^\infty\frac{L\partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{b}l(1-ae^{-b}).$$

Cet exemple correspond au cas où $f(x)$ est $=\text{arc tang}\frac{x}{b}$. D'une manière semblable on pourra transformer les intégrales

$$\int_0^{2n\pi}\frac{L\partial x}{(b+x)^\alpha},\quad \int_0^{2n\pi}l(b+x)L\,\partial x,\quad \text{etc.}$$

en déplaçant x dans l'exposant à l'aide des équations

$$(b+x)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty c^{\alpha-1}e^{-(b+x)c}\partial c,\qquad l(b+x) = \int_0^\infty\frac{e^{-c}-e^{-(b+x)c}}{c}\partial c.$$

Berlin, Février 1845.

10.

De l'erreur qui peut se présenter dans l'addition de fractions décimales retranchées.

(Par Mr. *R. Hoppe* à Keilhau près Rudolstadt.)

Comme on sait, on peut disposer du dernier chiffre des fractions décimales retranchées, de manière que la quantité négligée ne surpasse pas la demi-unité de ce même chiffre, ou, ce qui revient au même, que la fraction puisse devenir autant trop grande que trop petite, afin que, le calcul terminé, le maximum et la valeur probable de l'erreur résultante soient les moindres possibles pour le même nombre de chiffres décimaux. A l'ordinaire, lorsqu'il faut avoir attention à cette erreur, il ne s'agit que de calculer son maximum, ce qui en général n'a point de difficulté. Mais il y a aussi des cas, où il est désirable de pouvoir taxer l'erreur probable, nommément si l'erreur effective peut être trouvée après le calcul, et que l'on veut savoir d'avance, combien de chiffres décimaux il faut employer pour pouvoir compter avec apparence sur un résultat assez exact. Voilà le cas de la solution des équations numériques. C'est la dite erreur, que nous allons déterminer, dans le cas particulier, où elle résulte de l'addition, en fonction du nombre des termes. Sa valeur peut être exprimée très-simplement par une intégrale définie, dont le développement en forme finie donnera peut-être encore plus d'intérêt à cette recherche.

Soit $w_n(x)$ la probabilité d'une erreur $= x$, résultante de l'addition de n fractions décimales retranchées jusqu'à m chiffres, et w_n l'erreur probable: on aura

$$1. \quad w_n = \frac{\int x w_n(x) \partial x}{\int w_n(x) \partial x},$$

où les limites des intégrales sont celles de l'existence de $w_n(x)$. Pour les déterminer, il y a à remarquer que l'erreur x est toujours positive, tout autant si le résultat est trop grand, ou trop petit. Donc la limite inférieure est $= 0$. Si l'on pose $a = \frac{1}{2}.10^{-m}$, x ne peut pas être $> na$. Donc les limites sont 0 et na. Soit de plus $\xi = \pm x$ la quantité dont le résultat est trop grand: il suit de la détermination du dernier chiffre, que $w_n(\xi) = w_n(-\xi)$, et que

la valeur moyenne des erreurs des résultats trop grands est en même temps celle de toutes les erreurs. Comme de plus, $w_n(x)$, quantité infiniment petite, ne peut être représentée que par le rapport avec une pareille quantite, nous posons $w_1(x) = 1$. Or pour pouvoir y comparer $w_n(x)$, expression d'une probabilité sous des suppositions différentes, il faut que le nombre des cas considérés, exprimé par

$$\int_0^{na} w_n(x)\,\partial x,$$

soit la même quantité pour tout n; d'où il suit que

$$2. \quad \int_0^{na} w_n(x)\,\partial x = \int_0^{a} w_1(x)\,\partial x = \int_0^{a} \partial x = a.$$

Donc l'équation (1.) devient

$$3. \quad w_n = \frac{1}{a}\int_0^{na} x\, w_n(x)\,\partial x = a\int_0^{n} x\, w_n(ax)\,\partial x.$$

Passons à la détermination de $w_n(x)$. La probabilité d'une erreur $= \eta$, positive ou négative, résultante de l'addition de $n-r$ termes, est $= w_{n-r}(\eta)$; celle d'une erreur $= \xi - \eta$, résultante de l'addition des r termes suivans entre eux-seuls, est $= w_r(\xi - \eta)$; donc la probabilité de la rencontre des deux cas est

$$= A w_{n-r}(\eta)\, w_r(\xi - \eta).$$

Or le cas de cette rencontre, η parcourant toutes ses valeurs possibles, est celui d'une erreur $= \xi$ dans la somme de tous les n termes. Par conséquent on a

$$w_n(\xi) = A\int w_{n-r}(\eta)\, w_r(\xi - \eta)\,\partial\eta,$$

l'intégrale étant prise dans sa plus grande étendue. Pour trouver la constante A, intégrons l'équation par rapport à ξ dans toute son étendue: il viendra

$$\int w_n(\xi)\,\partial\xi = A\int w_{n-r}(\eta)\,\partial\eta \int w_r(\xi - \eta)\,\partial\xi.$$

Or on a en vertu de l'équation (2.)

$$\int_{-na}^{na} w_n(\xi)\,\partial\xi = 2\int_0^{na} w_n(\xi)\,\partial\xi = 2a.$$

$$\int_{-ra+\eta}^{ra+\eta} w_r(\xi - \eta)\,\partial\xi = \int_{-ra}^{ra} w_r(\xi)\,\partial\xi = 2a,$$

donc

$$2a = 2aA.\int w_{n-r}(\eta)\partial\eta = 2aA.2a,$$

$$A = \frac{1}{2a},$$

$$w_n(\xi) = \frac{1}{2a}\int w_{n-r}(\eta)\, w_r(\xi-\eta)\,\partial\eta.$$

Posons $r=1$, $\xi = x$; on aura

$$w_r(\xi-\eta) = 1 \quad \text{pour} \quad -a < x-\eta < a$$

$$\text{ou pour } x-a < \eta < x+a,$$

$$w_r(\xi-\eta) = 0 \text{ hors de ces limites, ce qui donne}$$

$$4. \quad w_n(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} w_{n-1}(\eta)\,\partial\eta.$$

Au moyen de cette formule la quantité $w_n(x)$ se réduit, par des intégrations faciles à effectuer, à $w_1(x)$, dont la valeur est connue. Cependant, comme ces integrations deviendraient très-incommodes par la distinction de beaucoup de cas, nous éviterons cet inconvénient en exprimant $w_1(\eta)$ par une intégrale définie, qui conservera sa forme pour toute valeur de η. En effet on a d'après le théorème de ***Fourier:***

$$f(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\varphi\eta\,\partial\varphi \int_0^\infty f(\vartheta)\cos\varphi\vartheta\,\partial\vartheta,$$

sous la condition $f(\eta) = f(-\eta)$. La fonction $w_1(\eta)$, comme elle remplit cette condition, peut être substituée à $f(\eta)$, ce qui donne

$$w_1(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\varphi\eta\,\vartheta\varphi \int_0^a \cos\varphi\vartheta\,\partial\vartheta,$$

parceque $w_1(\vartheta) = 1$ pour $\vartheta < a$, et $=0$ pour $\vartheta > a$. En effectuant l'intégration par rapport à ϑ, on trouve

$$w_1(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\varphi\eta \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,\partial\varphi.$$

Faisons maintenant dans l'équation (4.) successivement $n = 2, 3, 4$, etc. il viendra en vertu de la dernière équation:

$$w_2(x) = \frac{1}{a\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,\partial\varphi \int_{x-a}^{x+a} \cos\varphi\eta\,\partial\eta = \frac{2}{a\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\right)^2 \cos x\varphi\,\partial\varphi,$$

$$w_3(x) = \frac{1}{a^2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\right)^2 \partial\varphi \int_{x-a}^{x+a} \cos\eta\varphi\,\partial\eta = \frac{2}{a^2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\right)^3 \cos x\varphi\,\partial\varphi.$$

En poursuivant ce procédé, on obtient, comme il est facile de voir,

$$w_n(x) = \frac{2}{a^{n-1}\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\right)^n \cos x\varphi\,\partial\varphi,$$

et en posant pour plus de simplicité $\frac{\varphi}{a}$ et ax au lieu de φ et x:

$$5.\quad w_n(ax) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \cos x\varphi\,\partial\varphi.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (3.), on obtient l'expression suivante de la quantité cherchée:

$$6.\quad w_n = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \partial\varphi \int_0^n x\cos x\varphi\,\partial x$$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \frac{n\varphi\sin n\varphi - 1 + \cos n\varphi}{\varphi^2}\,\partial\varphi,$$

ou bien, en intégrant par parties:

$$w_n = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \partial\,\frac{1-\cos n\varphi}{\varphi}$$

$$= \frac{2na}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1} \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\varphi}\cdot\frac{1-\cos n\varphi}{\varphi^2}\,\partial\varphi.$$

Ajoutant cette valeur à la première expression, multipliée par n, on obtient

$$7.\quad (n+1)w_n = \frac{2na}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1} \frac{n\sin\varphi\sin n\varphi - \cos\varphi(1-\cos n\varphi)}{\varphi^2}\,\partial\varphi.$$

Pour transformer encore cette expression, nous présenterons encore quelques formules, qu'on tire immédiatement des propriétés de la fonction $w_n(x)$ mentionnées plus haut. En vertu de l'équation (2.) nous avons

$$\int_0^n (ax)\,\partial x = 1;$$

donc en exprimant $w_n(ax)$ par sa valeur (5.):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \partial\varphi \int_0^n \cos x\varphi\,\partial x = 1,$$

c'est à dire

$$8.\quad \int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \frac{\sin n\varphi}{\varphi}\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi.$$

De plus, il nous est connu que $w_n(ax)$ est nul pour tout $x \geqq n$; donc

$$9.\quad \int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \cos x\varphi\,\partial\varphi = 0 \quad (x \geqq n).$$

Intégrant par parties, on obtient

$$\int\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n\partial\sin x\varphi \text{ (depuis } \varphi=0 \text{ jusqu'à } \varphi=\infty)$$
$$= n\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n\frac{\sin x\varphi}{\varphi}\partial\varphi - n\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1}\cos\varphi\frac{\sin x\varphi}{\varphi}\partial\varphi,$$

car la partie intégrée s'évanouit pour les deux limites. On a donc

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1}\cos\varphi\frac{\sin x\varphi}{\varphi}\partial\varphi = \int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n\frac{\sin x\varphi}{\varphi}\partial\varphi,$$

où $x\geqq n$; par conséquent pour $x=n$ on a en vertu de l'équation (8.),

$$10.\quad \int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1}\cos\varphi\frac{\sin n\varphi}{\varphi}\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi.$$

De plus, les équations (7. et 6.) deviennent en vertu de (8.)

$$11.\quad (n+1)w_n = n^2a - \frac{2na}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1}\cos\varphi\frac{1-\cos n\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi,$$
$$w_n = na - \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n\frac{1-\cos n\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi.$$

En diminuant n de 2, on obtient

$$w_{n-2} = (n-2)a - \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-2}\frac{1-\cos(n-2)\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi,$$

et puisque

$$1-\cos(n-2)\varphi = 1-\cos n\varphi-(\cos(n-2)\varphi-\cos n\varphi)$$
$$= 1-\cos n\varphi - 2\sin\varphi\sin(n-1)\varphi,$$

où le dernier terme, ayant été introduit dans l'intégrale, donne $2a$ en vertu de l'équation (8.), on a

$$12.\quad w_{n-2} = na - \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-2}\frac{1-\cos n\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi.$$

Maintenant si l'on effectue par parties l'intégration de l'expression (11.), toutes les trois parties, dont elle consiste alors, ont des valeurs connues. En effet il vient

$$(n+1)w_n = n^2a + \frac{2a}{\pi}\int_\infty^0\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi(1-\cos n\varphi)\partial.\varphi^{-n}$$
$$= n^2a - \frac{2(n-1)a}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-2}\frac{1-\cos n\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi$$
$$+ \frac{2na}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n(1-\cos n\varphi)\partial\varphi$$
$$- \frac{2na}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1}\cos\varphi\frac{\sin n\varphi}{\varphi}\partial\varphi,$$

où l'on peut appliquer l'équation (12.) à la première intégrale, celles (5. et 9.) à la seconde, et celle (10.) à la troisième, ce qui donne

$$(n+1)w_n = n^2 a - (n-1)(na - w_{n-2}) + nw_n(0) - na,$$

ou bien

$$13. \quad (n+1)w_n - (n-1)w_{n-2} = naw_n(0).$$

Ayant ainsi réduit en forme algébrique les quantités w_n à celles $w_n(x)$, nous passons à chercher en forme finie l'intégrale qui exprime la dernière quantité. En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^n \cos x\varphi\,\partial\varphi = -\frac{1}{n-1}\int_\infty^0 \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1} \cos x\varphi\,\partial\varphi^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1} \{n\cos\varphi\cos x\varphi - x\sin\varphi\sin x\varphi\}\,\partial\varphi$$

$$= \frac{n-x}{2(n-1)}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1} \cos(x-1)\varphi\,\partial\varphi + \frac{n+x}{2(n-1)}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{n-1} \cos(x+1)\varphi\,\partial\varphi,$$

c'est à dire

$$2(n-1)w_n = (ax) = (n-x)w_{n-1}(ax-a) + (n+x)w_{n-1}(ax+a),$$

ou bien, en posant

$$14. \quad w_n(ax) = \frac{2^{-n}}{1.2\ldots(n-1)} f_n(x):$$

$$f_n(x) = (n-x)f_{n-1}(x-1) + (n+x)f_{n-1}(x+1).$$

Cette équation est statisfaite par la valeur suivante de la fonction f:

$$15. \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k (n-2k-x)^{n-1} \psi(2k-n+x),$$

où ψ désigne une fonction arbitraire. Car substituant cette valeur dans le second membre, et posant en même temps dans sa dernière partie $k-1$ au lieu de k, on a

$$(n-x)f_{n-1}(x-1) + (n+x)f_{n-1}(x+1) =$$
$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \{(n-x)(n-1)_k - (n+x)(n-1)_{k-1}\}(n-2k-x)^{n-2}\psi(2k-n+x).$$

Maintenant, puisque

$$(n-x)(n-1)_k - (n+x)(n-1)_{k-1}$$
$$= (n-2k-x)\{(n-1)_k + (n-1)_{k-1}\} + 2k(n-1)_k - (2n-2k)(n-1)_{k-1}$$
$$= (n-2k-x)n_k,$$

on voit que la somme exprime la valeur suppsée de $f_n(x)$; comme cela doit être.

Posons $n=1$, pour déterminer ψ, il viendra

$$2w_1(ax) = f_1(x) = \psi(x-1)-\psi(x+1).$$

Le premier membre étant nul pour $x>1$, on a

$$\psi(x+2) = \psi(x) \qquad (x>0),$$

par conséquent aussi

$$\psi(x+2\nu) = \psi(x) \qquad (x>0),$$

où ν est un nombre entier positif quelconque. De même, $w_1(ax)$ étant nul pour $x<-1$, on a

$$\psi(x-2) = \psi(x) \text{ et}$$
$$\psi(x-2\nu) = \psi(x) \qquad (x<0).$$

Maintenant si ϱ est une quantité comprise entre 0 et 2,

$$2w_1(a\varrho-a) = 2 = \psi(\varrho-2)-\psi(\varrho).$$

Donc, en posant $x=\varrho+2\mu$, où μ est un nombre entier quelconque, on a

$$\psi(x) = \psi(\varrho) \qquad (x>0),$$
$$\psi(x) = \psi(\varrho-2) = \psi(\varrho)+2 \qquad (x<0).$$

Soit d'abord n un nombre pair, on aura

$$\psi(2k-n+x) = \psi(\varrho),$$

sous condition $2k-n+x>0$, ou bien

$$k < \tfrac{1}{2}n-\mu-\tfrac{1}{2}\varrho > \tfrac{1}{2}n-\mu-1,$$
$$\psi(2k-n+x) = \psi(\varrho)+2,$$

sous condition $2k-n+x<0$, ou bien

$$k < \tfrac{1}{2}n-\mu-\tfrac{1}{2}\varrho < \tfrac{1}{2}n-\mu.$$

Donc en substituant cette valeur dans l'équation (15.), on trouve

$$f_n(x) = \psi(\varrho)\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k n_k(n-2k-x)^{n-1}$$
$$+2\sum_{k=0}^{k=\frac{1}{2}n-\mu-1}(-1)^k n_k(n-2k-x)^{n-1},$$
$$x = 2\mu+\varrho.$$

Quant à la première somme, il est connu qu'elle est nulle. En posant $\frac{1}{2}n-\mu-1$ au lieu de μ, on obtient

$$f_n(x) = 2\sum_{k=0}^{k=\mu}(-1)^k n_k(n-2k-x)^{n-1},$$

où x est compris entre $n-2\mu-2$ et $n-2\mu$. Si n est impair, il y a à

mettre $\varrho+1$ au lieu de ϱ, et $x=\varrho+2\mu+1$, parceque $\psi(2k-n+x)$ prend l'incrément 2 auprès d'une valeur de x entière et impaire. Enfin on substituera $\frac{1}{2}n-\mu-\frac{3}{2}$ à μ pour parvenir au même résultat. D'après l'équation (14.) on a maintenant

$$w_n(ax) = \frac{2^{-n+1}}{1.2\ldots(n-1)}\sum_{k=0}^{k=\mu}(-1)^k n_k(n-2k-x)^{n-1}$$

$$n-2\mu-2 < x < n-2\mu,$$

et puisque cette expression n'est pas discontinue, là où x tombe dans une de ses limites (car les termes survenants sont d'abord nuls), il est permis de poser

$$n-2\mu-2 \gtreqless x \gtreqless n-2\mu.$$

L'expression de w_n, en forme finie, peut maintenant être trouvée de plusieurs manières; soit en développant une de ces intégrales, par lesquelles cette quantité a été représentée, soit en la ramenant au moyen de l'équation (3.) ou de (13.) à l'expression de $w_n(x)$. Si l'on substitue celle-ci dans l'équation (3.), on obtient

$$w_n = \frac{2^{-n+1}a}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^n x\,\partial x\sum_{k=0}^{k=\mu}(-1)^k n_k(n-2k-x)^{n-1}.$$

Pour rendre indépendante de x la limite supérieure de la somme, on peut aussi écrire cette équation comme suit:

$$w_n = \frac{2^{-n+1}a}{1.2\ldots(n-1)}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k n_k\int_0^n x\,\partial x(n-2k-x)^{n-1}A_\mu,$$

où il y a à faire $A_\mu=1$ pour $\mu \geqq k$, et $A_\mu=0$ pour $\mu<k$. Mais comme x est $\gtreqless n-2\mu$, A_μ est nul pour $\frac{1}{2}(n-x)<k$, ou bien pour $x>n-2k$; donc la limite supérieure de l'intégrale est $=n-2k$. Mais la limite inférieure étant zéro, k ne peut pas être $>\frac{1}{2}n$; donc $\frac{1}{2}n$ sera la limite supérieure de la somme; ce qui donne

$$w_n = \frac{2^{-n+1}a}{1.2\ldots(n-1)}\sum_{k=0}^{k=\frac{1}{2}n}(-1)^k n_k\int_0^{n-2k} x\,\partial x(n-2k-x)^{n-1}.$$

Or on a

$$\int x\,\partial x(n-2k-x)^{n-1} = -\frac{x}{n}(n-2k-x)^n - \frac{(n-2k-x)^{n+1}}{n(n+1)},$$

par conséquent

$$\int_0^{n-2k} x\,\partial x(n-2k-x)^{n-1} = \frac{(n-2k)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Comme cette quantité évanouit poûr $k=\frac{1}{2}n$, on obtient, la substitution faite:

$$w_n = \frac{2^{-n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \sum_{k=0}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k n_k (n-2k)^{n+1}.$$

Si n est très-grand, cette formule qui donne ce qu'on cherche en très-grands nombres qui se détruisent jusqu'à un petit résidu, n'est pas bien propre au calcul approximatif. Il y a donc à désirer une expression approximative de la même quantité, qui soit d'autant plus exacte que n est plus grand.

Partons de l'équation (5.). Elle donne, en posant $\frac{\varphi}{\sqrt{n}}$ au lieu de φ:

$$w_n(ax) = \frac{2}{\pi\sqrt{n}}\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{n}}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{n}}\right)^n \cos\frac{x\varphi}{\sqrt{n}}\,\partial\varphi.$$

Or pour $n=\infty$ on a

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{1}{6}\varphi^2},$$

donc ces quantités différeront très-peu l'une de l'autre pour de très-grands n, même lorsque $\frac{\varphi}{\sqrt{n}}$ a une valeur sensible, parceque toutes les deux sont alors très-petites elles-mêmes. En remplaçant l'une par l'autre, on obtient une intégrale dont la valeur est connue, savoir

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{6}\varphi^2}\cos\frac{x\varphi}{\sqrt{n}}\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{(6\pi)}\,e^{-\frac{3x^2}{2n}}, \text{ donc}$$

$$w_n(ax) = \sqrt{\frac{6}{n\pi}}\,e^{-\frac{3x^2}{2n}}$$

et suivant l'équation (3.) on a:

$$w_n = a\sqrt{\frac{6}{n\pi}}\int_0^n x\,\partial x\,e^{-\frac{3x^2}{2n}} = a\sqrt{\frac{2n}{3\pi}}\left(1-e^{-\frac{3}{2}n}\right).$$

La quantité $e^{-\frac{3}{2}n}$ peut être négligée avec d'autant plus de raison, que le reste est très petit lui-même. Posons en outre, pour diminuer cette erreur, $n+\frac{1}{10}$ au lieu de n: il sera sensiblement

$$w_n = a\sqrt{\frac{20n+2}{30\pi}}.$$

Dans la table suivante les valeurs de w_n exactes ont été rapprochées avec celles de cette expression.

n	$\frac{1}{a} w_n$		$\sqrt{\frac{20n+2}{30n}}$
1	$\frac{1}{2}$	0,5	0,48314
2	$\frac{2}{3}$	0,66667	0,66756
3	$\frac{13}{16}$	0,8125	0,81107
4	$\frac{14}{15}$	0,93333	0,93276
5	[illegible]	1,04080	1,04031
6	$\frac{239}{210}$	1,13810	1,13774
7	[illegible]	1,22774	1,22746
8	$\frac{1487}{1134}$	1,31129	1,31106
9	[illegible]	1,38982	1,38960
10	[illegible]	1,46416	1,46400

Berlin. Février 1845.

11.

Remarques sur les réductions de la fonction Gamma, et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés.

(Par Mr. *R. Hoppe* à Keilhau près Rudolstadt.)

Legendre a, dans la partie IV section III de ses exercices de calcul intégral, indiqué le procédé, pour réduire la fonction $\Gamma(x)$ dans toute son étendue à ses valeurs comprises dans un très-petit intervalle de x. Mais il y emploie de calculs superflus. Le procédé peut être simplifié, comme il me parait, en deux points.

En premier lieu *Legendre* se sert de la formule

$$1.\quad \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^{nx-\frac{1}{2}}}\Gamma(nx)$$

pour $n=2,3,5$, pour réduire l'intervalle fondamental jusqu'à l'étendue de $\frac{1}{6}$. Je ferai voir, que l'on peut atteindre le même but à l'aide de deux équations fort simples en l'employant pour $n=2$.

En second lieu son procédé de réduire l'intervalle jusqu'à $\frac{1}{4}$ exige un nombre indéfini de répétitions. Je donnerai un système de cinq équations, qui offrent toutes les valeurs de la fonction, immédiatement réduites au même intervalle.

Voilà les équations dont il y aura à faire usage:

$$2.\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi},$$

$$3.\quad \Gamma(x)\Gamma(\tfrac{1}{2}+x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),$$

$$4.\quad \Gamma(x)\Gamma(\tfrac{1}{3}+x)\Gamma(\tfrac{2}{3}+x) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3^{3x}}\Gamma(3x).$$

I.

Posons dans l'équation (2.) $\frac{1}{2}(1+x)$, et dans (3.) $\frac{1}{2}x$ au lieu de x, et éliminons $\Gamma(\frac{1}{2}(1+x))$: il viendra

$$5.\quad \Gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x}\cos\frac{1}{2}x\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}x)}{\Gamma\frac{1}{2}(1-x)}.$$

Tandis que x parcourt ses valeurs depuis $\frac{1}{3}$ jusqu'à $\frac{2}{3}$, le second membre ne contient sous le signe Γ que des quantités comprises entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$. Donc, cet intervalle supposé connu, il ne reste à y réduire que celui depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{6}$; ce qui se fait par l'équation (3.) elle même:

$$\Gamma(x) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}.$$

Car, pour $x < \frac{1}{6}$, $\Gamma(\frac{1}{2}+x)$ est toujours connu, et $\Gamma(2x)$ peut être pareillement réduit à $\Gamma(4x)$, $\Gamma(8x)$, etc.: quantités, parmis lesquelles il existe toujours une, qui tombe entre $\Gamma(\frac{1}{6})$ et $\Gamma(\frac{1}{3})$; intervalle fondamental.

II.

Posons dans l'équation (5.) $\frac{1}{3}-2x$, et dans (3.) $\frac{2}{3}+x$ au lieu de x, et éliminons $\Gamma(\frac{1}{3}+x)$ et $\Gamma(\frac{2}{3}+x)$ entre ces deux équations et (4.): il viendra

$$6.\quad \Gamma(3x) = \frac{2^{-\frac{5}{3}-2x}3^{3x-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{\sin(\frac{1}{3}+x)\pi\sin(\frac{1}{3}-x)\pi}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{6}-x)}{\Gamma(\frac{1}{3}-x)\Gamma(\frac{1}{3}-2x)}.$$

Maintenant nous aurons le système suivant de cinq équations, dont les trois premières s'obtiennent des équations (6, 5, 3), en y remplaçant x respectivement par $\frac{1}{3}x$, $1-2x$, $x-\frac{1}{2}$, tandis que la quatrième résulte de l'application de l'équation (2.) à la première, et que la cinquième est cette équation elle même:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{2^{-\frac{5+2x}{3}}3^{x-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{\sin(1+x)\frac{1}{3}\pi\sin(1-x)\frac{1}{3}\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{3}x)\Gamma(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}x)}{\Gamma(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x)\Gamma(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x)} && \{\tfrac{1}{4}<x<\tfrac{3}{8}\}\\
&= \frac{4^{-x}\sqrt{\pi}}{\sin x\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-x)}{\Gamma(1-2x)} && \{\tfrac{3}{8}<x<\tfrac{1}{2}\}\\
&= 4^{1-x}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(x-\frac{1}{2})}{\Gamma(2x-1)} && \{\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{5}{8}\}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}\sin\frac{1}{3}x\pi\sin(1+x)\frac{1}{3}\pi}{2^{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}-x}\sin x\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{3}x)\Gamma(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x)\Gamma(\frac{1}{3}x-\frac{1}{6})} && \{\tfrac{5}{8}<x<\tfrac{3}{4}\}\\
&= \frac{\pi}{\sin x\pi}\,\frac{1}{\Gamma(1-x)} && \{\tfrac{3}{4}<x<1\}.
\end{aligned}$$

Ici toutes les quantités sous le signe Γ, excepté le premier membre, sont comprises entre 0 et $\frac{1}{4}$.

Il serait difficile de trouver, par la même voie par laquelle on cherche les formules de réduction, jusqu'à où l'intervalle fondamental puisse être diminué. Peut-être l'argumentation suivante conduirait elle plutôt à un résultat. *Legendre*

a exprimé comme suit, le nombre des quantités parmi les $n-1$ quantités $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)$, ... $\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$ qui doivent être connues, pour en pouvoir tirer les valeurs des autres: ce nombre est

$$= \tfrac{1}{2}n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right), \ldots$$

où α, β, γ, ... sont les facteurs premiers inégaux de n. On voit par cette expression, que ce nombre, divisé par n, est le plus petit, si n est le produit de tous les nombres premiers $2.3.5.7\ldots p$. Concevons donc que toutes les quantités comprises entre 0 et 1 soient des fractions de la forme

$$\frac{m}{2.3.5.7\ldots p},$$

p étant infiniment grand: le plus petit intervalle de $\Gamma(x)$, à supposer connu, sera égal à la limite du produit

$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{7})\ldots,$$

quantité qui exprime en même temps le nombre des nombres premiers à n et plus petit que n. Cependant, en tant que je sache, le problème de trouver la limite de ce produit n'a pas encore été résolu; et même il est douteux, si elle est nulle, ou non.

Cette question influe sur la théorie des intégrales Eulériennes, en tant qu'elle demande à décider, si les équations (1. et 2.), avec celle-ci

$$7.\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

c'est à dire toutes les relations algébriques ensemble, peuvent servir de définition de la fonction; ce qui serait ainsi, si par un ou par plusieurs intervalles, dont la somme est infiniment petite, on pouvait calculer tout le reste des valeurs.

Supposons en attendant, que la fonction soit complètement déterminée par ses relations en forme finie, et examinons, quelles d'entre elles suffiraient à sa définition. En premier lieu, il est aisé de voir que l'équation (1.) ne peut y manquer, puisque les deux autres équations (2. et 7.) laissent tout à fait indeterminée la fonction dans un intervalle de $\frac{1}{2}$. Mais l'équation (1.) peut elle-même être satisfaite par la substitution de différentes fonctions au lieu de $\Gamma(x)$: fonctions qu'on peut comprendre sous la forme commune

$$8.\quad b^{x-\frac{1}{2}}c^{x'}(4\sin^2 x\pi)^{\alpha}\Gamma(x),$$

où b, c et α sont des quantités arbitraires, et où x' désigne le plus grand nombre entier $< x$. Pour $b=1$, $c=1$ la même substitution satisfait aussi

l'équation (7.), et pour $\alpha=0$ elle remplit l'équation (2.). Donc chaque paire d'équations admet la substitution de différentes fonctions, et ce ne sont que les trois équations ensemble, qui sont exclusivement satisfaites par $\Gamma(x)$ lui-même, et peuvent servir de définition.

Mais les équations (2.) et (7.) peuvent aussi être remplacées par la détermination de deux valeurs particulières de la fonction, p. ex.

$$9. \quad \Gamma(x_1)=y_1; \qquad 10. \quad \Gamma(x_2)=y_2.$$

Donc la substitution de l'expression (8.) ne peut avoir lieu que sous les conditions

$$11. \quad \begin{cases} b^{x_1-\frac{1}{2}}c^{x_1'}(4\sin^2 x_1\pi)^\alpha = 1, \\ b^{x_2-\frac{1}{2}}c^{x_2'}(4\sin^2 x_2\pi)^\alpha = 1. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de chercher des valeurs de x_1 et x_2 telles, que ces équations ne peuvent être remplies que pour $b=1$, $c=1$, $\alpha=0$. Si la seconde équation manquait, il n'existerait aucune valeur de x_1 de cette sorte; car, si $x_1-\frac{1}{2}\gtrless 0$, la première équation serait remplie par un c quelconque, en posant $\alpha=0$; $b=c^{\frac{x_1'}{x_1-\frac{1}{2}}}$, et, si $x_1-\frac{1}{2}=0$, par un b quelconque, en posant $c=1$, $\alpha=0$. Il faut donc déterminer au moins deux valeurs particulières de la fonction.

Si de plus x_1 et x_2 étaient des fractions, $\sin x\pi$ serait différent de zéro; donc pour un α quelconque on pourrait trouver des valeurs de b et c qui satisfont les deux équations, excepté dans le cas où les exposans ou de b où de c étaient nuls: cas où pour une valeur quelconque de ce même radical, les valeurs b ou $c=1$, $\alpha=0$ satisferaient l'équation. Par conséquent il faut que x_1 ou x_2 soit un nombre entier.

Soit donc $x_2=m$, x_2' sera $=m-1$; α ne pourra être que $=0$. En éliminant b et c entre les deux équations, on obtient

$$b^{\frac{x_1-\frac{1}{2}}{x_1'}-\frac{m-\frac{1}{2}}{m-1}}=1; \qquad c^{\frac{x_1'}{x_1-\frac{1}{2}}-\frac{m-1}{m-\frac{1}{2}}}=1,$$

où il faut supposer tous les quatre dénominateurs différents de zéro. Pour faire b et $c=1$, il faut et il suffit de poser

$$\frac{x_1-\frac{1}{2}}{x_1'}-\frac{m-\frac{1}{2}}{m-1}\gtrless 0, \text{ ou bien}$$

$$x_1-x_1'\gtrless \tfrac{1}{2}+\frac{x_1'}{2(m-1)}.$$

Cette condition est toujours remplie 1°. si $x_1'>m-1$; car le premier membre

est alors $\gtreqless 1$, le second membre $\lesseqgtr 1$, et dans le cas où tous les deux sont $= 1$, x_1 devient $= m$; 2°. si x_1 est un nombre entier; car alors on a $x - x_1' = 1$, $x_1 \gtrless m$, $x_1' \gtrless m-1$, $\frac{x_1'}{2(m-1)} \gtrless \frac{1}{2}$.

Considérons encore les cas où $x_1 - \frac{1}{2}$ ou x_1' ou $m-1$ est nul. Si $x_1 - \frac{1}{2} = 0$, x_1' est $= 0$, l'équation (11.) devient identique, et il ne reste qu'une équation déterminante. Si à la fois $x_1' = 0$ et $m-1 = 0$, les deux équations sont remplies par $b = 1$, pour un c quelconque. Si au contraire parmi les trois quantités dont il s'agit, x_1' ou $m-1$ est nul lui-seul, il suit $b = 1$ et ensuite $c = 1$.

En rapprochant les résultats de ces considérations, on voit que les équations (1., 9. et 10.), où x_2 désigne un nombre entier, peuvent servir de définition de la fonction Γ, si une quelconque des conditions suivantes est remplie:

1°. Que x_1 soit un nombre entier;

2°. Que x_1 soit une fraction $> x_2 - 1$, et en sus > 1, si $x_2 = 1$;

3°. Que x_1 soit une fraction $< x_2 - 1$, excepté les valeurs de la forme $\mu + \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2(x_2-1)}$, où μ désigne un nombre entier quelconque $< x_1$.

La démonstration de cette remarque a été fondée sur la supposition, que l'expression (8.) est la plus générale, qui satisfait l'équation (1.); mais elle prouve rigoureusement que les équations (1., 9. et 10.) ne peuvent pas servir de définition, à moins que les conditions, que nous venons d'exposer, ne soient remplies.

Nous nous contentons de justifier cette supposition par le succès dans un seul cas; savoir en posant $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, et de démontrer qu'il est possible de tirer des équations (1., 9. et 10.) toutes les propriétés de la fonction Γ.

Soit donc $\Gamma(a)$ une fonction, continue depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \infty$. et qui satisfait les trois équations

$$12. \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na);$$

$$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(2) = 1.$$

Posons $a + \frac{1}{n}$ au lieu de a, et divisons l'équation résultante par l'équation primitive: il viendra

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(na+1)}{n\Gamma(na)}.$$

Posons ici $\frac{a}{m}$ à la place de a, ensuite encore m au lieu de n: en divisant l'une par l'autre les deux équations ainsi obtenues, il viendra

$$\frac{\Gamma\left(\frac{na}{m}+1\right)}{\frac{n}{m}\Gamma\left(\frac{na}{m}\right)} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}.$$

Cela donne pour $a=1$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}{\frac{n}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} = 1.$$

Comme la fraction $\frac{n}{m}$ est arbitraire, il suit:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Appliquant cette formule aux Γ dans l'équation (12.), et passant aux logarithmes, on obtient

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\left\{l\Gamma\left(a+1+\frac{k}{n}\right)-l\left(a+\frac{k}{n}\right)\right\} = l\Gamma(na+1)-la-naln+\text{const.}$$

Différentiant par rapport à a, remplaçant a par $\frac{a}{n}$, posant pour plus de simplicité

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a} = \psi(a)$$

et divisant par n, on trouve

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n}\psi\left(1+\frac{a+k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{a+k} = \psi(a+1)-\frac{1}{a}-ln.$$

Or on a $ln=\sum_{k=1}^{k=n-1}l\frac{k+1}{k}$; donc, comme $\frac{1}{a}$ détruit le premier terme de la seconde somme, il vient

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n}\psi\left(1+\frac{a+k}{n}\right) = \psi(a+1)-\sum_{k=1}^{k=n-1}\left\{l\frac{k+1}{k}-\frac{1}{a+k}\right\}.$$

Si l'on pose $\frac{a+k}{n}=x$, $\frac{1}{n}=\partial x$, le premier membre, n croissant à l'infini, devient

$$=\int_0^1\psi(1+x)\partial x = l\Gamma(2)-l\Gamma(1) = 0,$$

donc on a

$$\psi(a+1) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{l\frac{k+1}{k}-\frac{1}{a+k}\right\}.$$

En intégrant par rapport à a et à partir de $a=0$, on trouve

$$l\Gamma(a+1) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ a l \frac{k+1}{k} - l \frac{a+k}{k} \right\},$$

et en repassant des logarithmes aux nombres:

$$\Gamma(a+1) = \frac{1.2\ldots.k(k+1)^a}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k)} \quad (k=\infty):$$

équation dont *Gauss* a déduit toutes les propriétés de la fonction Γ.

Après avoir prouvé la possibilité de définir la fonction Γ par ses relations en forme finie, nous allons en faire une application aux facultés analytiques, dont la théorie, dûe à l'éditeur de ce journal, a été fondée par lui sur une définition par leurs relations en forme finie, que nous transcrivons, pour les réduire aux relations de la fonction Γ.

Les facultés analytiques ont été définies comme fonctions de trois variables $f(u, x, y)$ qui satisfont les trois équations

$$13.\quad \begin{cases} f(u,\ x,\ y+a) = f(u, x, y) f(u+xy, x, a) \\ f(au,\ ax,\ y) = a^y f(u, x, y) \\ f(u,\ x,\ 1) = u. \end{cases}$$

Les deux premières de ces équations sont remplies en posant

$$14.\quad f(u,\ x,\ y) = \frac{x^y \varphi\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

où φ désigne une fonction arbitraire d'une variable. Cette expression devant statisfaire la dernière équation, la fonction φ est soumise à la relation

$$\varphi\left(\frac{u}{x}+1\right) = \frac{u}{x}\varphi\left(\frac{u}{x}\right) \text{ ou bien}$$

$$\varphi(x+1) = x\varphi(x).$$

Par conséquent toutes les fonctions de la forme (14.), où la fonction φ jouit de la propriété de la fonction Γ exprimée par l'équation (7.), sont comprises dans la définition des facultés, et jouissent des mêmes propriétés, qui suivent de la dite théorie. En particulier on a donc

$$15.\quad f(u, x, y) = \frac{x^y \Gamma\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{x}\right)}.$$

Cherchons les relations, qu'il faut ajouter à la définition f, pour en exclure toute autre fonction.

En premier lieu il suit de nos recherches relatives à la définition de la fonction Γ, qu'elle n'est pas possible sans que la fonction φ à satisfasse l'équation (1.). En faisant croître u successivement de $\frac{x}{n}$, et en multipliant les valeurs de f correspondantes, on obtient sans difficulté, en vertu de cette équation:

$$16. \quad f(u,x,y)f\left(u+\frac{x}{n}, x,y\right)f\left(u+\frac{2x}{n}, x,y\right)\dots f\left(u+\frac{n-1}{n}x, x,y\right) = f\left(u,\frac{x}{n}, ny\right).$$

Mais comme les équations (1. et 7.) se trouvent l'une et l'autre remplies en posant $(4\sin^2 x\pi)^\alpha\Gamma(x)$ au lieu de $\Gamma(x)$, il suit que les équations (13. et 16.) le sont, si l'on pose

$$f(u,x,y) = \left(\frac{\sin^2\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\sin^2\frac{u}{x}}\right)^\alpha \frac{x^y\Gamma\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{x}\right)}.$$

Donc pour faire que α soit $=0$, il faut déterminer une valeur de f telle, que le radical de la puissance arbitraire soit nul, c'est à dire que $\frac{u}{x}+y$ soit un nombre entier, et $\frac{u}{x}$ une fraction, qui ne peut être que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. puisque sans cela $\Gamma\left(\frac{u}{x}\right)$ n'est pas exprimable en forme finie. Posons donc $\frac{u}{x}+y=1$, $\frac{u}{x}=\frac{1}{2}$, on aura

$$17. \quad f(\tfrac{1}{2}x, x, \tfrac{1}{2}) = \sqrt{\frac{x}{\pi}},$$

et les équations (13, 16 et 17.) pourront servir à la définition de la fonction individuelle, que l'équation (15.) exprime par les intégrales Eulériennes.

Berlin, 26 Février 1845.

12.

Notice sur un manuscrit Arabe d'un traité d'algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahîm Alkhayâmî, contenant la construction géométrique des équations cubiques.

(Par Mr. *F. Woepcke*, priv. doc. à l'université de Bonn.)

I.

Les oeuvres des illustres mathématiciens, que la Grèce a produits pendant l'espace de six siècles, ont été presque continuellement l'objet de travaux savans. Dès le commencement du moyen âge, jusqu'à nos jours, elles ont été traduites, commentées, publieés, souvent par des géomètres, qui eux-mêmes avaient une haute célébrité. Il suffira ici de rappeler les noms de *Nassir eddin al Thusi*, *de Bachet de Mezériac*, *d'Halley*.

Les découvertes importantes par lesquelles le génie Arabe pendant une période d'une semblable durée, a enrichi la même science, n'ont pas été assez heureuses pour s'attirer une pareille attention. On est même allé jusqu'à soutenir, que les Arabes n'avaient en général rien inventé, ou presque rien au delà de ce qu'ils avaient puisé des auteurs Grècs, traduits en Arabe depuis le temps des khalifes *Haroun Alrachid* et *Almamoun*. Des recherches soigneuses et étendues meneront probablement à des résultats fort différens.

La notice présente réussira peut-être à en founir une preuve, en démontrant, que les Arabes ont systématiquement développé un problème, dont chez les Grècs on ne trouve que des traces éparses, et dont la résolution moderne est censée faire grandement honneur aux génies de *Viète* et de *Descartes*.

J'avais trouvé le traité Arabe, dont il s'agit, cité deux fois, comme contenant probablement la résolution des équations cubiques: d'abord par *Montucla*, ensuite, dans une dissertation de M. *Garz*, sur les commentateurs Arabes *d'Euclide*, ce qui me fit désirer de pouvoir l'examiner moi-même. M. *Freitag*, dont l'illustre direction m'a guidé dans l'étude de la langue Arabe, eut l'in-

signe bonté de se faire envoyer en ma faveur de Leyde le volume manuscrit, dans lequel, parmi un grand nombre de mémoires, traitant de différens objets mathématiques, se trouve aussi celui *d'Alkhayâmî* *).

L'identité de ce traité, ainsi que la haute estime dont il jouit chez les Orientaux, sont constatées par *Hâdjî Khalfa*, qui en cite le commencement. Des raisons qu'il serait trop long de détailler ici, prouvent qu'il ne fut pas écrit avant le milieu du onzième siècle, ni après la fin du quatorzième. Montucla cite un astronome *Omar Cheyam*, auteur de la nouvelle forme d'intercalation, introduite chez les Persans en 1079 par *Gelâl eddin Melir-Shah;* je n'ai pu encore vérifier s'il y a identité entre cet astronome et l'auteur du traité dont il s'agit.

Je vais maintenant donner un aperçu succinct de ce que ce traité contient.

II.

L'auteur commence par esquisser en quelques lignes l'histoire du problème des équations cubiques, depuis Archimède jusqu'à son propre temps; il y trouve occasion de nommer deux célèbres géomètres Arabes: *Almâhâmî et Abou Djafar Alkhâzin* dont d'ailleurs la mémoire nous a été conservée par *le Turikh al Hocamâ* chez *Casiri.*

Suit une dédication au grand-juge *Abou Tâhir,* et après cela l'introduction proprement dite du traîté d'algèbre, contenant les définitions des notions fondamentales de cette science.

Ces définitions sont assez intéressantes, parcequ'elles font voir combien la philosophie *d'Aristote* a influé sur la science Arabe; on y reconnaît la terminologie du grand *Stagirite;* il s'y trouve même des passages, qui ne sont intelligibles qu'à l'aide d'une connaissances exacte de son système. Cette érudition métaphysique distingue favorablement notre auteur de *Mohammed Ben Mousa,* qui n'en offre point de traces.

Je remarque qu'en général on doit accorder à *Alkhayâmî* un rang supérieur à celui de *Mohammed Ben Mousa* ou de *Behâ-Eddîn,* vu que les traités de ceux-ci n'ont pour but que l'instruction des commençans, tandis que celui *d'Alkhayâmî* porte un caractère plus élevé, effleurant seulement les questions d'une portée inférieure; appuyant sur les difficultés réelles, citant

---

*) Je ne saurais manquer de reconnaître ici la libéralité bienveillante avec laquelle M. M. le bibliothécaire en chef et le conservateur des manuscrits de la bibliothèque de Leyde se sont prêtés à ce désir.

les travaux des savans contemporains, corrigeant parfois leurs erreurs, ne donnant jamais des exemples en pure illustration des théorèmes proposés, à moins qu'ils n'aient une certaine célébrité historique. Ce n'est pas un des livres, qui reproduisent ce qu'on sait dans une science, mais un de ceux qui en reculent les bornes.

L'introduction de l'auteur est terminée par le tableau suivant des équations, dont il va donner la théorie.

„*Equations simples.*"

1. $a = x$, 2. $a = x^2$, 3. $a = x^3$, 4. $bx = x^2$, 5. $bx = x^3$, 6. $cx^2 = x^3$,

„*Equations composées.*"

7. $x^2 + bx = a$,	13. $x^3 + bx = a$,	19. $x^3 + cx^2 + bx = a$,
8. $x^2 + a = bx$,	14. $x^3 + a = bx$,	20. $x^3 + cx^2 + a = bx$,
9. $bx + a = x^2$,	15. $bx + a = x^3$,	21. $x^3 + bx + a = cx^2$,
10. $x^3 + cx^2 = bx$,	16. $x^3 + cx^2 = a$,	22. $cx^2 + bx + a = x^3$,
11. $x^3 + bx = cx^2$,	17. $x^3 + a = cx^2$,	23. $x^3 + cx^2 = bx + a$,
12. $cx^2 + bx = x^3$,	18. $cx^2 + a = x^3$,	24. $x^3 + bx = cx^2 + a$,
	25. $x^3 + a = cx^2 + bx$.	

Les équations (4—6, et 10—12.) sont ramenées aussi par des procédés géométriques à celles qu'on en déduit en les divisant par x ou x^2.

On ne trouve pas dans ce système, complet à cela près, les équations suivantes:

$$x + a = 0,\quad x^2 + a = 0,\quad x^2 + bx + a = 0,\quad x^3 + a = 0,$$
$$x^3 + bx + a = 0,\quad x^3 + cx^2 + a = 0,\quad x^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

a, b, c étant positifs; ces formes impliquent un contresens pour les mathématiciens Arabes, qui regardent comme impossible la résolution d'une équation, dès qu'elles n'admet pas des racines positives; aussi cette manière d'écrire les équations, due au génie *d'Harriot*, où la somme de tous les termes, formant le premier membre, est égalée à zèro, est-elle essentiellement occidentale et moderne.

La résolution algébrique et géométrique des équations carrées rassemble à celle donnée par *Mohammed Ben Mousa;* cependant *Alkhayâmî* déduit sa demonstration géométrique avec beaucoup d'élégance des propositions *d'Euclide:* Elementa II, 5, 6, VI, 28, 29, Data 58, 59. Cette méthode a échappé à *Mohammed*, et pourtant celui-ci, vivant à la cour *d'Almamoun*, devait connaître les Élémens *d'Euclide* traduits en Arabe déjà du temps de *Haroun Alrachid* par *Hedjadj Ben Yousouf Ben Matar Alcouphî*

III.

La résolution des équations cubiques, qui se trouve à la suite de celle des équations carrées, et qui occupe la partie principale de ce traité, n'est pas une résolution proprement dite, à la manière de celle qui porte le nom de *Cardan*, mais une construction géométrique; aussi l'auteur déclare-t-il exprès, qu'il lui a été impossible de les resoudre d'une autre manière et qu'il abandonne aux géomètres à venir, le problème de leur résolution algébrique.

Avant de passer à cette construction géométrique des équations cubiques, nous allons en exposer en peu de mots les principes analytiques, tels qu'ils se présentent du point de vue moderne.

Étant données n équations respectivement du degré $p, q, r, \ldots w$, renfermant n quantités inconnues, en éliminant entre ces équations $n-1$ inconnues, on obtiendra généralement une équation du degré $p.q.r\ldots w$ qui ne renfermera qu'une seule inconnue.

Lorsque le nombre des équations données, et des inconnues qu'elles renferment, ne monte qu'à deux, leurs degrés respectifs étant p et q, l'équation qui résulte de l'élimination, sera du degré $p.q$, et aura pour racines les valeurs des abscisses des points, où se rencontrent les deux courbes planes représentées par les équations données.

Les coefficiens de l'équation produite par l'élimination, sont des fonctions des coefficiens des équations données; on pourra donc se servir des relations qui existent entre ces deux systèmes de coefficiens, pour déterminer les coefficiens des n équations, qui renferment les n inconnues, de manière à produire par l'élimination une équation proposée, dont le degré cependant ne doit s'élever au delà du produit $p.q.r\ldots w$.

Soient données les deux équations du second degré:

$$1.\quad \alpha y^2+\beta yx+\gamma x^2+\delta y+\varepsilon x+\varphi = 0,$$

$$2.\quad \alpha_1 y^2+\beta_1 yx+\gamma_1 x^2+\delta_1 y+\varepsilon_1 x+\varphi_1 = 0,$$

et faisons

$$\text{II.}\quad \begin{cases} m_1 = \alpha_1\beta-\alpha\beta_1 & n_1 = \beta_1\gamma-\beta\gamma_1 \\ m_2 = \alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1 & n_2 = \beta_1\varepsilon-\beta\varepsilon_1 \\ m_3 = \alpha_1\delta-\alpha\delta_1 & n_3 = \beta_1\varphi-\beta\varphi_1 \\ m_4 = \alpha_1\varepsilon-\alpha\varepsilon_1 & v = \gamma_1\delta-\gamma\delta_1 \\ m_5 = \alpha_1\varphi-\alpha\varphi_1 & \end{cases} \qquad \begin{aligned} w_1 &= \delta_1\varepsilon-\delta\varepsilon_1 \\ w_2 &= \delta_1\varphi-\delta\varphi_1, \end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} C_4 = (m_2)^2 - m_1 n_1 \\ C_3 = 2m_2 m_4 - m_3 n_1 - m_1(n_2 - v) \\ C_2 = (m_4)^2 + 2m_2 m_5 - m_3(n_2 - v) - m_1(n_3 + w_1) \\ C_1 = 2m_4 m_5 - m_3(n_3 + w_1) - m_1 w_2 \\ C_0 = (m_5)^2 - m_3 w_2; \end{cases}$$

l'équation qu'on obtient en éliminant y entre les équations (1. et 2.), sera la suivante

$$3.\quad C_4 x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 = 0.$$

Pour rendre l'équation (3.) identique avec une équation cubique proposée $x^3 + cx^2 + bx + a = 0$, il suffira de déterminer les coëfficiens des équations (1. et 2.) à l'aide des rélations (I. et II.), de manière à faire évanouir C_4 et à rendre C_3, C_2, C_1, C_0 respectivement proportionnels à $1, c, b, a$.

Les équations (1. et 2.) représentent deux sections coniques; on pourra donc construire deux sections coniques, dont les points de rencontre ont pour abscisses les racines d'une équation cubique proposée; on arrivera encore à ce but, d'obtenir les racines d'une équation cubique proposée par une construction géométrique, en laissant carré-carrée l'équation, qui résulte de l'élimination, mais en déterminant les coefficiens de manière que, divisée par un de ses facteurs, elle se transforme dans l'équation cubique proposée.

Comme pour cet effet on peut disposer de 12 quantités, afin de donner à 5 fonctions de ces quantités des valeurs déterminées, on pourra satisfaire en outre à des conditions arbitraires, qui contribueront à rendre plus élégante la résolution du problème; on pourra entre autres donner à 7 coefficiens des équations (1. et 2.) les valeurs 0 ou 1 (de manière cependant à ne pas diminuer le degré de ces équations).

1er Exemple. En posant

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 0;\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = 0,\ \delta_1 = 0,$$

on obtient

$$m_1 = -1,\ m_4 = -\varepsilon_1,\ m_5 = -\varphi_1;\ n_1 = \gamma,\ n_2 = \varepsilon,\ n_3 = \varphi;$$

le reste des quantités (I.) s'évanouissent; et par suite

$$C_4 = \gamma,\ C_3 = \varepsilon,\ C_2 = \varepsilon_1^2 + \varphi,\ C_1 = 2\varepsilon_1\varphi_1,\ C_0 = \varphi_1^2.$$

Ceux des coefficiens qui restaient d'abord indéterminés, prennent donc les valeurs suivantes: $\gamma = C_4$, $\varepsilon = C_3$, $\varepsilon_1 = \pm\frac{C_1}{2\sqrt{C_0}}$, $\varphi = C_2 - \frac{C_1^2}{4C_0}$, $\varphi_1 = \pm\sqrt{C_0}$.
En même temps $C_4 = 1$, $C_3 = c + \xi$, $C_2 = b + c\xi$, $C_1 = a + b\xi$, $C_0 = a\xi$ sont les coefficiens de l'équation carré-carrée, qui, divisée par le facteur $x + \xi$

devient identique avec l'équation cubique proposée; ξ étant une quantité arbitraire, nous en disposerons à donner une forme plus élégante aux expressions que nous venons d'obtenir, ce qui se fait en posant $\xi = \frac{a}{b}$; nous aurons $C_3 = \frac{a}{b} + c$, $C_2 = b + \frac{ac}{b}$, $C_1 = 2a$, $C_0 = \frac{a^2}{b}$, d'où l'on tire $\gamma = 1$, $\varepsilon = \frac{a}{b} + c$, $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{b}$, $\varphi = \frac{ac}{b}$, $\varphi_1 = \pm\frac{a}{\sqrt{b}}$.

2me Exemple. Posons

$$\beta = 0,\ \delta = 0,\ \varphi = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \varepsilon_1 = 0,\ \varphi_1 = 0,$$

il vient

$$m_2 = -\alpha\gamma_1,\ m_3 = -\alpha\delta_1,\ v = -\gamma\delta_1,\ w_1 = \delta_1\varepsilon;$$

les autres quantités (I.) s'évanouissent; donc

$$C_4 = \alpha^2\gamma_1^2,\ C_3 = 0,\ C_2 = \alpha\gamma\delta_1^2,\ C_1 = \alpha\varepsilon\delta_1^2,\ C_0 = 0.$$

Des relations $C_3 = 0$ et $C_0 = 0$ il suit, qu'en divisant par x l'équation produite par l'élimination, on obtient une équation cubique, dont le second terme s'est évanoui; la combinaison choisie dans cet exemple sera donc propre à produire une équation proposée de la forme $x^3 + bx + a = 0$. Posons pour cet effet $b = \frac{\gamma\delta_1^2}{\alpha\gamma_1^2}$, $a = \frac{\varepsilon\delta_1^2}{\alpha\gamma_1^2}$; on peut disposer de 5 quantités pour en déterminer deux autres, ce qui permet de donner à trois des premières des valeurs arbitraires; posons donc $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\gamma_1 = 1$, il vient $\delta_1 = \pm\sqrt{b}$, $\varepsilon = \frac{a}{b}$.

3me Exemple. Posons

$$\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0,\ \varepsilon = 0,\ \beta_1 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \delta_1 = 0,$$

on aura

$$m_1 = \alpha_1\beta,\ m_5 = \alpha_1\varphi,\ n_2 = -\beta\varepsilon_1,\ n_3 = -\beta\varphi_1;$$

les autres quantités (I.) s'évanouissent; par suite on a

$$C_4 = 0,\ C_3 = \alpha_1\beta^2\varepsilon_1,\ C_2 = \alpha_1\beta^2\varphi_1,\ C_1 = 0,\ C_0 = \alpha_1^2\varphi^2.$$

De ce que $C_4 = 0$, on voit qu'on arrive directement à une équation cubique, dont, parceque $C_1 = 0$, le troisième terme s'évanouit; la combinaison adoptée ici produira donc une équation de la forme $x^3 + cx^2 + a = 0$, dès qu'on aura fait $c = \frac{\varphi_1}{\varepsilon_1}$, $a = \frac{\alpha_1\varphi^2}{\beta^2\varepsilon_1}$. Comme dans l'exemple précédent, on pourra déterminer arbitrairement trois de ces quantités; faisons $\alpha_1 = 1$, $\beta = 1$, $\varepsilon_1 = m$, il vient $\varphi = \pm\sqrt{a.m}$, $\varphi_1 = m.c$.

Nota. La plus simple valeur à donner à ε_1, aurait été évidemment 1; mais sans doute on s'est aperçu déjà que les combinaisons que je viens de proposer,

ne sont pas choisies au hasard, mais qu'elles ont un certain rapport à la méthode dont se sert l'auteur Arabe; c'est aussi la raison pourquoi ε_1 est laissé indéterminé ici. On sait d'ailleurs qu'il est regardé comme une faute, de construire une équation cubique par l'intersection de deux sections coniques; cette construction pouvant s'opérer plus simplement.

IV.

Je ne crois pouvoir mieux caractériser à présent la méthode *d'Alkhayâmî* qu'en traduisant d'abord sa résolution d'une des équations dont il s'occupe, pour exposer ensuite les traits généraux de ses constructions; j'accompagnerai cette traduction d'un commentaire*); rendant par les notations modernes le procédé du géomètre Arabe. (Pl. II.)

„La cinquième espèce des équations cubiques à trois termes est la suivante: un cube et un nombre sont égaux à des carrés. Faisons la ligne AC égale au nombre des carrés, et formons un cube égal au nombre donné, et dont le côté soit H; la ligne H doit nécessairement être, ou égale à la ligne AC, ou plus grande que AC, ou plus petite que AC. Lorsque les deux lignes sont égales, la résolution est impossible, parceque le côté du cube cherché

---

*) No. 17. $x^3+a=cx^2 \ldots a,\ c,\ x$ désignent des quantités positives.

$$AC=c,\ H^3=a.\ H \gtreqless AC.$$

I. $H=AC \ldots x \gtreqless H$; 1. $x=H \ldots AC.x^2=H^3$ ou $cx^2=a$, donc $cx^2<a+x^3$,
2. $x<H \ldots AC.x^2<H^3$ ou $cx^2<a$, donc $cx^2<a+x^3$,
3. $x>H \ldots x^3>AC.x^2$ ou $x^3>cx^2$, donc $x^3+a>cx^2$.

II. $H>AC \ldots$ impossible par les mêmes raisons.

III. $H<AC,\ BC=H \ldots BC \gtreqless AB$ ou $\sqrt[3]{a} \gtreqless \frac{1}{2}c$.

(Observons encore en passant que dans le manuscrit Arabe les figures, contrairement à leur distination ordinaire, ne semblent être ajoutées au texte, que pour en embrouiller encore le sens, obscurci par de nombreuses fautes de copie.)

$BCDE \ldots$ carré $=H^2=a^{\frac{2}{3}}$; $DR,\ DT \ldots$ hyperbole équilatère, dont $CA,\ CE$ les asymptotes; $AT,\ AL,\ AK \ldots$ parabole, dont BC le parametre. (Pour les propriétés des sections coniques employées dans ses démonstrations, *Alkhayâmî* a renvoyé préalablement aux deux premiers livres des sections coniques *d'Apollonius.*)

1) $BC=AB \ldots BD^2=AB.BC$, donc D un point qui satisfait à l'équation de la parabole; l'autre point dont parle l'auteur, aura pour abscisse (à compter de C) $x=\frac{1}{4}c\{1+\sqrt{5}\}$ et pour ordonnée $y=\{\sqrt{5}-1\}\frac{1}{4}c$.

2) $BC>AB \ldots BD^2>AB.BC$, d'où il suit en effet que la parabole passe en deçà du point D. L'auteur dit encore que lorsque $\sqrt[3]{a}>\frac{1}{2}c$, x doit être compris entre c et $\sqrt[3]{a}$; de l'équation proposée $x^3+a=cx^2$ il suit immédiatement $cx^2>x^2$ ou $x<c$; il reste donc à prouver que $x>\sqrt[3]{a}$. Observons d'abord qu'il ne pourra

doit nécessairement être, ou égal à H, ou plus grand que H, ou plus petit que H. Lorsqu'il est égal à H, son carré, multiplié par AC, sera égal au cube de H; donc le nombre sera égal au nombre des carrés, sans qu'on ait besoin d'y ajouter encore le cube. Lorsque le côté cherché est plus petit que H, son carré, multiplié par AC, sera plus petit que le nombre donné: donc le nombre donné de carrés sera déjà plus petit que le nombre donné, sans ajouter encore quelque chose à ce dernier. Lorsque le côté est plus grand que H, son cube sera plus grand que son carré, multiplié par AC, sans qu'on ajoute au premier le nombre donné."

„Ensuite lorsque H est plus grand que AC, l'impossibilité aura lieu dans les trois cas, à plus forte raison; il faut donc que H soit plus petit que AC; si non, la résolution est impossible."

„Or retranchons de AC la ligne BC, égale à H; la ligne BC sera, ou égale à AB, ou plus grande, ou plus petite. Qu'elle soit dans la première figure égale, dans la seconde plus grande et dans la troisième plus petite; formons dans les trois figures le carré DC, et faisons passer par le point D une hyperbole, dont CA, CE soient les asymptotes; ce sera dans la première figure la courbe DR et dans les deux autres DT. Décrivons en outre une

---

être question d'une rencontre des deux sections coniques, que tant que $\sqrt[3]{a} < \frac{2}{3}c$, parceque de $\sqrt[3]{a} \gtreqless \frac{2}{3}c$ il suit $27a \gtreqless 8c^3 > 4c^3$, ce qui rendrait l'intersection imaginaire. Ensuite, désignant $cx^2 - x^3$ par $f(x)$, on aura $\frac{df(x)}{dx} = 3x\{\frac{2}{3}c - x\}$, d'où il suit que pour toutes les valeurs de x, comprises entre 0 et $\frac{2}{3}c$, $f(x)$ décroîtra avec x. Pour $x = \sqrt[3]{a}$, puisque en même temps $c < 2\sqrt[3]{a}$, on trouve $cx^2 - x^3 < a$; donc pour toutes les valeurs de x plus petites que $\sqrt[3]{a}$, $cx^2 - x^3 < a$, ce qu'il s'agissait de prouver. Le cas du contact donne deux racines égales et positives $x = \frac{2}{3}c$.

3) $BC < AB$; $BD^2 < AB . BC$ . . . La parabole passe au delà du point D et doit nécessairement rencontrer l'hyperbole en deux points, ce qu'on trouve aussi en deduisant de $\sqrt[3]{a} < \frac{1}{2}c \ldots 4c^3 > 32a > 27a$:

$TR \perp AC$, $TR \perp EC$, l'hyperbole fait $RC:BC = BC:TR$
la parabole $BC:TR = TR:RA$,

d'où suit

$$RC^2:BC^2 = BC:RA \ldots BC^3 = RC^2 . RA \text{ ou } a = RC^2 . RA,$$
$$a + RC^3 = RC^2 . RA + RC^3 = RC^2 . AC,$$
$$\text{donc } a + RC^3 = RC^2 . c \;\ldots\; x = RC.$$

Quant aux cas particuliers et aux problèmes impossibles, dont parle l'auteur, en voici la discussion moderne: l'équation $x^3 - cx^2 + a = 0$ admet toujours une racine négative (de laquelle le mathématicien Arabe ne s'occupe point), et ses deux autres racines sont positives ou imaginaires selon que $27a \lesseqgtr 4c^3$.

parabole dont le sommet soit *A*, l'axe *AC* et le paramètre *BC;* ce sera dans la première figure *AT*, dans la seconde *AL*, dans la troisième *AK*. Les deux sections coniques seront connues de position. Dans la première figure la parabole passera par le point *D*, parceque le carré de *BD* est égal au produit de *AB* par *BC;* donc le point *D* sera situé sur la périphérie de la parabole; cette dernière rencontrera l'hyperbole encore dans un autre point; ce que la moindre réflexion vous fera reconnaître. Dans la seconde figure le point *D* sera situé en dehors de la périphérie de la parabole, parceque le carré de *BD* sera plus grand que le produit de *AB* par *BC;* alors, si les deux sections coniques se rencontrent dans un autre point pour se toucher ou s'entrecouper (ce qui fait que la perpendiculaire menée de ce point rencontre nécessairement la ligne *AC* entre les points *A* et *B*), la résolution sera possible; si non, elle sera impossible. Ce contact, ou cette intersection, ont échappé à l'excellent géomètre *Aboul Djoud;* il déclara donc la résolution impossible, dès que *BC* est plus grand que *AB;* en quoi il s'est trompé. Cette espèce d'équation est aussi celle parmi les six espèces, dont avait besoin *Alkhayâmî*. Ainsi remarquez-la. Dans la troisième figure le point *D* est situé dans l'intérieur de la parabole, et les deux sections coniques se rencontrent en deux points."

„Dans tous les cas, menons du point de rencontre une perpendiculaire à la ligne *AB;* dans la seconde figure ce sera *TR;* puis une seconde perpendiculaire du même point à la ligne *CE*, ce sera *TK;* les aires *TC* et *DC* sont égales, donc *RC* à *BC* comme *BC* à *TR;* en même temps, parceque *TR* est ordonnée de la section conique *ATL*, son carré sera égal au produit *AR*.*BC*, d'où l'on tire: *BC* à *TR* comme *TR* à *RA;* donc on a quatre lignes en proportion continue: *RC* à *CB* comme *BC* à *TR*, et comme *TR* à *RA;* et parsuite le carré de *RC* au carré de la seconde *BC*, comme la seconde *BC* à la quatrième *RA*. Il suit de cela que le cube de *BC*, qui est égal au nombre donné, doit être égal au solide dont la base est le carré de *RC*, et la hauteur *RA;* ajoutons à tous les deux le cube de *RC*, il suit que le cube de *RC*, ensemble avec le nombre donné, est égal au solide dont la base est le carré de *RC*, et la hauteur *AC*, qui était égale au nombre donné des carrés; c'est là ce qu'il s'agissait de trouver."

„Or nous venons de démontrer, que cette espèce d'équations cubiques comprend différens cas particuliers et qu'elle renferme des problèmes impossibles; la résolution a été effectuée par la combinaison des propriétés de deux sections coniques, d'une parabole et d'une hyperbole."

V.

D'une manière analogue à celle-ci, *Alkhayâmî* construit, une à une, toutes ses équations cubiques; ce sont les suivantes

3.	$x^3 - a = 0$	19.	$x^3 + cx^2 + bx - a = 0$
13.	$x^3 + bx - a = 0$	20.	$x^3 + cx^2 - bx + a = 0$
14.	$x^3 - bx + a = 0$	21.	$x^3 - cx^2 + bx + a = 0$
15.	$x^3 - bx - a = 0$	22.	$x^3 - cx^2 - bx - a = 0$
16.	$x^3 + cx^2 - a = 0$	23.	$x^3 + cx^2 - bx - a = 0$
17.	$x^3 - cx^2 + a = 0$	24.	$x^3 - cx^2 + bx - a = 0$
18.	$x^3 - cx^2 - a = 0$	25.	$x^3 - cx^2 - bx + a = 0.$

En déduisant les équations analytiques des sections coniques, dont il se sert dans ces constructions, et en comparant ensuite entre elles ces équations, on arrive à un résultat assez intéressant, dont voici l'exposé.

Désignons par p, q, r, s, t des quantités qui ne peuvent prendre que les valeurs $+1$ ou -1, ce qui permettra de poser $pq = \frac{p}{q}$, $p^2 = 1$, etc. la méthode du géomètre Arabe se reduit aux trois systèmes suivants:

I. $$y^2 + px^2 + q\frac{a}{b}x = 0 \quad \begin{cases} p = 0 & \ldots \text{ parabole} \\ p = +1 & \ldots \text{ cercle} \\ p = -1 & \ldots \text{ hyperbole} \end{cases}$$

$$x^2 - \sqrt{b}.y = 0 \ \ldots \text{ parabole}$$

$$\overline{x^4 + pbx^2 + qax = 0} \quad \text{ou} \quad x^3 + pbx + qa = 0;$$

II. $$yx - \sqrt{a}.m = 0 \ \ldots \text{ hyperbole}$$

$$y^2 + pmx + qmc = 0 \ \ldots \text{ parabole}$$

$$\overline{px^3 + qcx^2 + a = 0} \ \ldots \quad \text{ou} \quad x^3 + pq\,cx^2 + pa = 0;$$

III. $$y^2 + px^2 + q\left\{\frac{a}{b} \pm c\right\}x + r\frac{ac}{b} = 0 \quad \begin{cases} p = +1 & \ldots \text{ cercle} \\ p = -1 & \ldots \text{ hyperbole} \end{cases}$$

$$yx + s\sqrt{b}.x + t\frac{a}{\sqrt{b}} = 0 \ \ldots \text{ hyperbole}$$

$$\overline{px^4 + q\left\{\frac{a}{b} \pm c\right\}x^3 + \left\{b + r\frac{ac}{b}\right\}x^2 + 2st\,ax + \frac{a^2}{b} = 0}$$

$$\text{ou } x^4 + pq\left\{\frac{a}{b} \pm c\right\}x^3 + p\left\{b + r\frac{ac}{b}\right\}x^2 + 2pst\,ax + p\frac{a^2}{b} = 0.$$

A l'aide du système I. peuvent être construites les équations (3, 13, 14, 15) lorsqu'on pose

3.	$p=0$	$q=-1$	$b=1$
13.	$p=+1$	$q=-1$	
14.	$p=-1$	$q=+1$	
15.	$p=-1$	$q=-1$;	

à l'aide du système II. les équations (16 — 18) lorsqu'on fait

16.	$m=\sqrt[3]{a}$	$p=-1$	$q=-1$
17.	$m=\sqrt[3]{a}$	$p=+1$	$q=-1$
18.	$m=c$	$p=-1$	$q=+1$;

enfin le système III. répond aux équations (19 — 25) lorsqu'aux quantités p, q, r, s, t on donne les valeurs suivantes:

	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.
p	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1
q	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1
r	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
s	+1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
t	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1

On ramène l'équation carré-carrée qui résulte du système III, à l'équation cubique proposée $x^3+ucx^2+vbx+wa=0$ en la divisant par $\left(x\pm\frac{a}{b}\right)$, ce qui peut être démontré aisément comme suit:

$$\left\{x^3+ucx^2+vbx+wx\right\}\cdot\left\{x+\frac{w}{v}\cdot\frac{a}{b}\right\}$$
$$=x^4+\left\{uc+\frac{w}{v}\cdot\frac{a}{b}\right\}x^3+\left\{vb+\frac{uw}{v}\cdot\frac{ac}{b}\right\}x^2+2wax+\frac{w^2}{v}\cdot\frac{a^2}{b}$$
$$=x^4+\left\{vw\frac{a}{b}+uc\right\}x^3+v\left\{b+uw\frac{ac}{b}\right\}x^2+2wax+v\frac{a^2}{b},$$

où les valeurs à donner aux quantités u, v, w sont les suivantes:

	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.
u	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1
v	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1
w	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1.

On voit maintenant que c'est exactement la méthode qui, dans les trois exemples proposés ci-dessus, a été déduite des principes analytiques de la construction géométrique des équations algébriques.

Je remarque encore qu'*Alkhayâmî* semble avoir ignoré, que dans l'équation générale du troisième degré on peut toujours faire disparaître le second terme, ce qui rend superflus les systèmes II et III.

VI.

Il me reste à parler du nombre des racines que l'auteur trouve pour chacune de ces équations.

Observons en premier lieu que les racines négatives ou imaginaires n'ont pas d'existence pour l'algébriste Arabe; il ne s'occupe donc que des racines *positives*, et dès qu'un problème n'en admet pas, il en regarde la résolution comme impossible.

Donc celle des trois racines de l'équation cubique, qui est toujours réelle et dont le signe est opposé à celui du terme constant de l'équation, n'est remarquée par *Alkhayâmî*, que lorsqu'elle est positive; c'est à dire dans les équations (3, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 24).

Relativement aux deux autres racines qui sont réelles ou imaginaires selon la nature des coefficiens de l'équation, *Alkhayâmî* découvre le véritable critérium géométrique de leur réalité: la rencontre en deux points, ou le contact des deux sections coniques, dont la combinaison représente l'équation proposée.

Dans un procédé purement géométrique, on ne doit pas s'attendre à trouver établie aussi la relation algébrique entre les coefficiens, qui répond au critérium énoncé; cependant on vient d'observer dans l'exemple traduit, qu'*Aboul Djoud* avait essayé de la trouver; malheureusement il était tombé dans des erreurs, que le génie pénétrant d'*Alkhayâmî* ne manque pas de relever.

Je remarque en passant, que les deux racines dont il s'agit, sont toujours imaginaires dans les cas (3, 13, 18.). Elles sont *positives* ou imaginaires dans les cas (14, 17, 20, 21, 24, 25). Dans tous les autres cas elles sont négatives ou imaginaires.

Au cas du contact des deux sections coniques, *Alkhayâmî* ne reconnait pas encore dans la valeur obtenue deux racines, égales seulement en quantité, mais essentiellement différentes.

Quant aux racines positives, *Alkhayâmî* discute soigneusement, et à deux erreurs près, avec une justesse parfaite le nombre des points de rencontre des deux sections coniques (du côté des coordonnées positives); ce qui revient à une détermination du nombre des racines positives. Voici ces deux erreurs. En discutant l'équation $x^3 - cx^2 + bx - a = 0$, il ne remarque pas, qu'elle peut avoir trois racines positives et n'a égard qu'à celle des trois racines, qui est toujours positive; puis dans l'équation $x^3 - cx^2 - bx + a = 0$,

en discutant séparément le cas $\frac{a}{b} \gtrless c$, pendant que $\frac{a}{b} \leqq c$, il ne parle que d'une seule des racines positives, tandis qu'il y en a deux.

Malgré le génie extraordinaire qu'on ne saurait lui disputer, ***Alkhayâmî*** n'a donc point reconnu cette vérité fondamentale, que toute équation cubique a essentiellement trois racines.

VII.

A la construction des équations cubiques se trouve jointe, en guise de corollaire, la partie de ce traité la plus importante pour la connaissance du point de vue, où se place l'auteur vis-à-vis des équations algébriques en général.

Alkhayâmî y discute les équations aux puissances négatives de l'inconnue, ou renfermant en même temps des puissances négatives et positives de l'inconnue, dont la résolution peut être ramenée à celle des équations carrées et cubiques.

Alkhayâmî y comprend les équations binomes du quatrième et du sixième degré. Relativement à celle du cinquième degré, il observe que sa résolution ne peut être réduite aux méthodes exposées dans ce traité (ce qui en effet ne peut se faire), mais il renvoie pour ce problème à la solution (géométrique) qu'il dit en avoir été donnée par ***Abou Ali Ibn Ahaïtam,*** célèbre géomètre Arabe, sur la vie et les écrits duquel on trouve des détails intéressants dans le ***Tarikh al Hocamâ*** chez ***Casiri.***

Aux 25 équations, dont la discussion occupe la partie principale de ce traité, ***Alkhayâmî,*** de cette manière, en ajoute 61 autres. Après en avoir fini la discussion, l'auteur se résume en ces termes:

„La totalité des équations ayant lieu entre ces sept degrés *), et résolubles par les méthodes que nous venons d'exposer, monte donc à ***quatre-vingt-six*** espèces, dont les traités de mes prédecesseurs ne contiennent que ***six.***"

Les six espèces dont veut parler l'auteur sont évidemment les suivantes:

1. $a = bx$, 2. $ax = bx^2$, 3. $a = bx^2$, 4. $a = bx + cx^2$,
5. $ax = b + cx^2$, 6. $ax^2 = b + cx$,

dont la résolution embrasse toute l'algèbre, également de ***Mohammed Ben Mousa*** et de ***Behâ-Eddin.*** Il parait donc, qu'au temps du second on avait oublié déjà une partie de ce qu'au temps du premier on ne savait pas encore.

*) Savoir les équations renfermant les sept puissances suivantes de l'inconnue:

$$x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{x^3}.$$

Bonn, au mois de Mars 1850.

13.

Sur la théorie des formes quadratiques ternaires.

(Par M. *Hermite* à Paris.)

Un des principaux caractères des formes ternaires réduites, lorsqu'elles sont définies, consiste en ce que le produit des coefficients des trois carrés des variables, est toujours inférieur au double du déterminant. C'est là comme on sait, une limite précise, découverte d'abord par induction, puis démontrée par Mr. *Gauss* dans l'écrit si remarquable sur l'ouvrage de Mr. *Seeber*. Mais les transformations analytiques de l'expression:

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

données par l'illustre géometre, et desquelles résulte avec tant d'élégance la limite indiquée, me semblent tenir à des principes singulièrement cachés, et qu'il m'a été impossible de retrouver malgré touts mes efforts. Après de longues recherches, j'ai découvert enfin une méthode nouvelle pour obtenir la limite de Mr. *Gauss*, et je vais la développer dans cette note, après avoir d'abord donné une démonstration simple, de l'existence des caractères attribués par Mr. *Seeber* aux formes réduites.

Soit en suivant la notation des Disquisitiones arithmeticae,

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

une forme définie positive à coefficients quelconques, car il n'y a aucunement lieu de les supposer entiers, dans la théorie de la réduction. Considérons la série entière des transformées distinctes équivalentes à f, et formons un groupe particulier de celles où le coefficient de l'un des carrés a la plus petite valeur possible. Réunissons ensuite dans un second groupe, toutes les formes du premier, où un autre coefficient des carrés est encore le plus petit possible. Enfin, formons un dernier groupe des formes précédentes, où le troisième coefficient des carrés est un minimum: je dis que les formes, ou la forme unique obtenue ainsi, offriront touts les caractères des réduites de Mr. *Seeber*.

Qu'on les représente en effet par:

$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},$$

les diverses formes binaires:

$$(A, B'', A') \qquad (A, B, A'') \qquad (A', B, A'')$$

seront nécessairement réduites. Si p. ex. (A', B, A'') ne l'était pas, en effectuant dans F, la substitution propre à la réduire, on arriverait à une transformée équivalente, où l'un au moins des coefficients de y^2 et z^2, serait diminué, A, restant le même; c'est donc à cette transformée que la méthode employée aurait conduit, et non à la proposée. Dans le cas où B, B', B'', sont négatifs, il faut encore arriver à la condition:

$$A+A' > 2(B+B'+B''),$$

ou bien:

$$A+A'+A''-2B-2B'-2B'' > A'',$$

A'' désignant le plus grand des coefficients des carrés. Pour cela considérons la transformée équivalente à la proposée, obtenue par la substitution:

$$x = X+Z$$
$$y = Y+Z$$
$$z = Z,$$

les coefficients de X^2, Y^2, Z^2, seront respectivement, A, A', et $A+A'+A''-2B-2B'-2B''$; cette dernière quantité ne peut donc être inférieure à A'', car c'est encore à cette transformée et non à la proposée que la méthode eut conduit.

J'omettrai pour abréger l'algorithme de réduction auquel les caractères des formes réduites conduisent tout naturellement, car il ne me semble pas très important au point de vue de la théorie, et j'arrive à mon principal objet, à la condition:

$$AA'A'' < 2D.$$

Tout repose sur la question suivante: $f(x, y, z)$ étant une forme définie quelconque: déterminer la limite précise du minimum de $f(x, y, 1)$, pour des valeurs entières de x et y.

Réduisons la forme binaire qui résulte des termes du second degré de $f(x, y, 1)$, par une substitution propre ou impropre:

$$x = mX+nY$$
$$y = \mu X+\nu Y,$$

de manière que le coefficient moyen de la transformée soit positif, (c'est là une condition essentielle, pour les considérations géométriques que nous aurons

à développer tout-à-l'heure) et posons

$$f(mX+nY, \mu X+\nu Y, 1)$$
$$= AX^2+2B''XY+A'Y^2+2BY+2B'X+A'' = F.$$

En désignant par α et β, deux constantes convenablement choisis, on pourra faire:

$$F = A(X+\alpha)^2+2B''(X+\alpha)(Y+\beta)+A'(y+\beta)^2+\frac{D}{\Delta},$$

D étant le déterminant de $f(x, y, z)$ et Δ celui de la forme binaire (A, B'', A') qui est réduite et où B'' est positif. Soient enfin, ξ et η deux nombres entiers tels que $\xi+\alpha$ et $\eta+\beta$ soient positifs et moindres que l'unité, je dis que le minimum de F, correspondra à l'un des quatre systèmes de valeurs:

$$\begin{array}{ll} X=\xi & Y=\eta \\ X=\xi-1 & Y=\eta \\ X=\xi & Y=\eta-1 \\ X=\xi-1 & Y=\eta-1. \end{array}$$

On sait en effet, qu'une propriété essentielle des formes binaires réduites $\varphi(x, y)$, consiste dans la relation:

$$\varphi(x-1, y) < \varphi(x, y);$$

si l'on a à la fois:

$$x > y \quad \text{et} \quad x > 1,$$

ou bien encore:

$$\varphi(x, y-1) < \varphi(x, y),$$

avec les conditions:

$$y > x \quad \text{et} \quad y > 1.$$

Les quatre systèmes de valeurs considérées, sont d'ailleurs evidemment les seuls, pour lesquels les valeurs absolues de $X+\alpha$ et $Y+\beta$ soient inférieures à l'unité, et il nous reste à déterminer auquel de ces systèmes correspond le minimum absolu de F, ainsi qu'à trouver une limite précise de ce minimum.

Pour cela j'aurai recours aux considérations géométriques suivantes. Soit OAB (Pl. II. fig. 4.) un triangle tel qu'on ait:

$$\overline{OA}^2 = A, \quad \overline{OB}^2 = A', \quad OA.OB.\cos AOB = B'',$$

le carré de la distance à l'origine O, d'un point M dont les coordonnées obliques paralèlles à OA et OB sont $OA.t$ et $OB.u$, sera précisément la valeur de la forme binaire $At^2+2B''tu+A'u^2$; et si on la désigne un instant

pour abréger, par $\varphi(t, u)$, on voit facilement qu'on aura les relations:

$$\overline{MO}^2 = \varphi(t, u), \quad \overline{MA}^2 = \varphi(t-1, u), \quad \overline{MB}^2 = \varphi(t, u-1),$$
$$\overline{MO'}^2 = \varphi(t-1, u-1),$$

en achevant le parallélogramme $OABO'$. Cela posé, il est maintenant facile de reconnaître qu'elle est la plus petite de ces quatre distances. Soient C et C', les centres des cercles circonscrits aux deux triangles OAB, $O'AB$; menons d'une part les perpendiculaires CP, CQ, sur les milieux de OA et OB, de l'autre les perpendiculaires $C'Q'$, $C'P'$, sur les milieux de $O'A$, $O'B$, et joignons CC'; selon que le point M, tombera dans l'intérieur des figures

$$OPCQ, \quad PAQ'C'C, \quad C'Q'O'P', \quad P'BQCC',$$

le sommet le plus voisin, sera:

$$O, \qquad A, \qquad O', \qquad B.$$

Mais dans ces divers cas, la distance la plus grande au sommet correspondant, ne surpassera jamais $CO = CA = AC' = C'O'$, etc., c. à. d. le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB. Or un calcul bien simple donne

$$CO = \frac{A.A'(A+A'-2B'')}{4(AA'-B''^2)}.$$

Nous voiçi donc conduits à cette limite précise du minimum de F ou de l'expression proposée $f(x, y, 1)$, savoir:

$$f(x, y, 1) < \frac{AA'(A+A'-2B'')}{4\varDelta} + \frac{D}{\varDelta}.$$

De là, comme on va voir, se déduit immédiatement la proposition que nous avions en vue. Désignons par $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ une forme définie réduite, où les coefficients a, a', a'', sont rangés par ordre croissant de grandeur, (a, b'', a') sera, comme on l'a vu, une forme binaire réduite, et nous pourrons toujours y supposer b'' positif. J'ajoute que a'' est le minimum de $f(x, y, 1)$ pour des valeurs entières de x et y, savoir pour $x = 0$, $y = 0$; s'il existait en effet deux entiers, m et n, pour lesquels on eut:

$$f(m, n, 1) < a'',$$

la substitution:

$$\begin{aligned} x &= X \quad mZ \\ y &= Y + nZ \\ z &= \quad\;\; Z \end{aligned}$$

donnerait une transformée équivalente, où a et a' seraient conservés, tandis que a'' serait remplacé par la valeur moindre, $f(m, n, 1)$; c'est donc cette transformée qui serait la réduite et non la proposée. Nous pouvons ainsi entre les coefficients de f, établir la relation obtenue plus haut, savoir:

$$a'' < \frac{a.a'(a-2b''+a')}{4(aa'-b''^2)} + \frac{D}{aa'-b''^2}.$$

On en deduit:

$$D > a''(aa'-b''^2) - \tfrac{1}{4}aa'(a-2b''+a'),$$

d'où:

$$2D - aa'a'' > aa'a'' - 2a''b''^2 - \tfrac{1}{2}aa'(a-2b''+a').$$

Or le second membre de cette inégalité est essentiellement positif; en effet, pour la plus petite et la plus grande valeur de b'' savoir: $b''=0$ et $b''=\frac{1}{2}a$, il se reduit à:

$$aa'a'' - \tfrac{1}{2}aa'(a+a') = aa'(\tfrac{1}{2}(a''-a) + \tfrac{1}{2}(a''-a')),$$

et à:

$$aa'a'' - \tfrac{1}{2}a^2a'' - \tfrac{1}{2}aa'^2 = \tfrac{1}{2}aa''(a'-a) + \tfrac{1}{2}aa'(a''-a');$$

quantités positives. Si donc pour des valeurs intermédiaires de b'', il pouvait devenir négatif, ce ne serait qu'à la condition de s'évanouir deux fois dans l'intervalle compris entre les limites $b''=0$, $b''=\frac{1}{2}a$; mais cela est impossible, l'équation:

$$aa'a'' - 2a''b''^2 - \tfrac{1}{2}aa'(a+a'-2b'') = 0$$

ayant nécessairement ses racines de signes contraires.

On a donc toujours, comme nous voulions l'établir:

$$aa'a''' < 2D.$$

Paris, Avril 1850.

14.

Bemerkung über einen Fall der Bewegung eines Systems von materiellen Puncten.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

In den Jahrgängen 1846 und 1847 seines Journals hat *Liouville* zwei längere Aufsätze mitgetheilt, welche mehrere Fälle enthalten, in denen sich die Bewegungsgleichungen eines materiellen Puncts integriren lassen. Man sieht leicht, dafs diese Probleme eigentlich alle auf das eine folgende zurückkommen:

Wenn die senkrechten Coordinaten des Puncts x, y, z, mit seinen elliptischen Coordinaten ϱ, μ, ν, vermittelst des Systems Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}+\frac{z^2}{\mu-c} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu-a}+\frac{y^2}{\nu-b}+\frac{z^2}{\nu-c} = 1,$$

verbunden sind, und die 3 Componenten der auf ihn wirkenden Kraft, nach den drei senkrechten Achsen, die drei partiellen Differentialquotienten der Function

$$U = \frac{f\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}+\frac{F\mu}{(\mu-\nu)(\mu-\varrho)}+\frac{\Pi\nu}{(\nu-\varrho)(\nu-\mu)},$$

(wo $f\varrho$, $F\mu$, $\Pi\nu$ beliebige Functionen respective von ϱ, μ und ν bezeichnen) nach den 3 Variabeln x, y, z sind: so sollen die endlichen Integralgleichungen der Bewegung dieses Puncts angegeben werden.

Liouville hat dies Problem für den Fall, dafs der Punct sich in einer Ebene bewegt, durch die bekannte *Lagrangesche* Umformung der Differential-Gleichungen der Bewegung, und im andern Falle, so wie in einer so eben im Augusthefte dieses Jahrs erschienenen Abhandlung den analogen Fall eines *Systems* von Puncten durch die Reduction auf die *Hamiltonsche* partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung behandelt. Wenn gleich nun dieser Gegenstand nicht nur in diesen Aufsätzen, sondern von *Jacobi*, welcher die hiezu benutzten Eigenschaften der merkwürdigen Transformation obiger Form,

so wie ihre, durch die *Hamiltonsche* partielle Differentialgleichung vermittelte Anwendung auf Probleme der Mechanik zuerst gefunden hat, an mehreren Orten und Gelegenheiten schon früher vollständig erschöpft ist, so dürfte es doch vielleicht nicht ganz uninteressant sein, wenn ich dieselben Differentialgleichungen, auf welche die Bewegung eines Systems von Puncten unter analogen Verhältnissen zurückkommt, in den wenigen folgenden Zeilen, ohne die bekannte Benutzung der partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, direct integrire.

Durch Einführung der Variabeln

$$x_1 = x'\sqrt{m'}, \quad x_2 = y'\sqrt{m'}, \quad x_3 = z'\sqrt{m'},$$
$$x_4 = x''\sqrt{m''}, \quad x_5 = y''\sqrt{m''}, \quad x_6 = z''\sqrt{m''},$$
etc.

kann man die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von materiellen Puncten, deren Coordinaten und Massen

$$x', \quad y', \quad z', \quad m',$$
$$x'', \quad y'', \quad z'', \quad m'',$$
etc.

sind, und auf welche als Componenten nach den 3 Achsen resp. die Kräfte

$$\frac{\partial U}{\partial x'}, \quad \frac{\partial U}{\partial y'}, \quad \frac{\partial U}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial U}{\partial x''}, \quad \frac{\partial U}{\partial y''}, \quad \frac{\partial U}{\partial z''},$$
etc.

wirken, auf folgende zurückführen:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \dots \quad \frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_n}.$$

Führt man nun neue Variablen $y_1, y_2, \dots y_n$ vermittelst der Gleichungen

$$x_1^2 = -\frac{Fa_1}{f'a_1}, \quad x_2^2 = -\frac{Fa_2}{f'a_2}, \quad \dots \quad x_n^2 = -\frac{Fa_n}{f'a_n}$$

ein, wo der Kürze wegen

$$Fz = (z - y_1)(z - y_2) \dots (z - y_n),$$
$$fz = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$$

gesetzt und $a_1, a_2, \dots a_n, z$ ganz beliebige Gröfsen sind, so kann man die Umformung der Differentialgleichungen in die neuen Variabeln sehr leicht vermittelst einer von *Hamilton* zuerst benutzten Methode ausführen, auf welcher seine übrigen Untersuchungen alle beruhen.

Man bildet nämlich den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2\right\}$$

in den neuen Variabeln und ihren Differentialquotienten nach der Zeit $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$, ... $\frac{dy_n}{dt}$, und führt statt der letztern die n Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$ ein, welche durch die Gleichungen

$$z_1 = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{dy_1}{dt}\right)}, \quad z_2 = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{dy_2}{dt}\right)}, \quad \dots \quad z_n = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{dy_n}{dt}\right)}$$

bestimmt werden; dann ist bekanntlich das transformirte System Differentialgleichungen

$$(A.) \quad dt : dy_1 : dy_2 : \dots : dy_n : dz_1 : dz_2 : \dots : dz_n$$
$$= 1 : \frac{\partial(T-U)}{\partial z_1} : \frac{\partial(T-U)}{\partial z_2} : \dots : \frac{\partial(T-U)}{\partial z_n} : \frac{\partial(U-T)}{\partial y_1} : \frac{\partial(U-T)}{\partial y_2} : \dots : \frac{\partial(U-T)}{\partial y_n}.$$

Um nun die im obigen Falle hiezu nöthigen Umformungen auszuführen, leitet man aus den beiden identischen Gleichungen

$$\frac{Fz}{(z-y_h)^2 fz}$$
$$= \frac{F'y_h}{(z-y_h)fy_h} + \frac{1}{z-a_1}\,\frac{Fa_1}{(a_1-y_h)^2 f'a_1} + \dots + \frac{1}{z-a_n}\,\frac{Fa_n}{(a_n-y_h)^2 f'a_n},$$

$$\frac{Fz}{(z-y_h)(z-y_k)fz}$$
$$= \frac{1}{z-a_1}\,\frac{Fa_1}{(a_1-y_h)(a_1-y_k)f'a_1} + \dots + \frac{1}{z-a_n}\,\frac{Fa_n}{(a_n-y_h)(a_n-y_k)f'a_n},$$

wo y_h und y_k zwei beliebige der Gröfsen $y_1, y_2, \dots y_k$ sind, indem man die Coëfficienten von z^{-1} vergleicht, folgende ab:

$$-\frac{F'y_h}{fy_h} = \frac{Fa_1}{(a_1-y_h)^2 f'a_1} + \dots + \frac{Fa_n}{(a_n-y_h)^2 f'a_n},$$
$$0 = \frac{Fa_1}{(a_1-y_h)(a_1-y_k)f'a_1} + \dots + \frac{Fa_n}{(a_n-y_h)(a_n-y_k)f'a_n}.$$

Vermittelst dieser bekannten Gleichungen, deren ich mich bei der Integration der *Abelschen* Differentialgleichungen, welche mit der folgenden sehr nahe verwandt ist, ebenfalls bedient habe, erhält man sofort

$$(B.) \quad \begin{cases} T = \tfrac{1}{8}\left\{\frac{F'y_1}{fy_1}\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \frac{F'y_2}{fy_2}\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 \dots + \frac{F'y_n}{fy_n}\left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2\right\}, \\ z_1 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{F'y_1}{fy_1}\,\frac{dy_1}{dt}, \quad z_2 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{F'y_2}{fy_2}\,\frac{dy_2}{dt}, \quad \dots \quad z_n = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{F'y_n}{fy_n}\,\frac{dy_n}{dt}. \end{cases}$$

und hiernach in den Variabeln $y_1, \dots y_n, z_1, \dots z_n$:

$$T = 2\left(\frac{fy_1}{F'y_1}z_1^2 + \frac{fy_2}{F'y_2}z_2^2 + \dots + \frac{fy_n}{F'y_n}z_n^2\right).$$

Wenn nun U die besondere Form hat, welche *Liouville* behandelt, nemlich

$$U = \frac{\psi_1 y_1}{F'y_1} + \frac{\psi_2 y_2}{F'y_2} + \dots + \frac{\psi_n y_n}{F'y_n},$$

wo $\psi_1 y_1$, $\psi_2 y_2$, etc. beliebige Functionen resp. der Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ bedeuten, so läfst sich das System Differentialgleichungen $(A.)$ wie folgt integriren.

Es ist

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial y_h} = \frac{\partial \dfrac{2z_h^2 fy_h - \psi_h y_h}{F'y_h}}{\partial y_h} + \Sigma \frac{2z_k^2 fy_k - \psi_k y_k}{F'y_k} \frac{1}{y_k - y_h},$$

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial y_h} = \frac{4z_h fy_h}{F'y_h},$$

wo das Summenzeichen bedeutet, dafs für k alle Zahlen $1, 2, \dots n$ mit Ausnahme von h gesetzt und die Resultate addirt werden. Sieht man nun für den Augenblick alle Variabeln im System $(A.)$, aufser y_h und z_h, als constant an, so ist, der identischen Gleichung

$$\frac{1}{y_k - y_h} = \frac{1}{z - y_k}\left\{\frac{z - y_h}{y_k - y_h} - 1\right\}$$

wegen, wo z eine ganz beliebige Gröfse ist,

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial(T-U)}{\partial z_k} dz_k$$

ein exactes Differential des Ausdrucks

$$\frac{2z_h^2 fy_h - \psi_h y_h}{F'y_h} + \Sigma \frac{2z_k^2 fy_k - \psi_k y_k}{F'y_k}\left(\frac{z - y_h}{z - y_k}\right),$$

und daher, weil jenes $= 0$ ist, dieser von y_h und z_h unabhängig. Eben so ist aber auch, das Product des Summenausdrucks durch

$$\frac{Fz}{z - y_h},$$

nämlich

$$Fz\,\Sigma \frac{2z_\lambda^2 fy_\lambda - \psi_\lambda y_\lambda}{F'y_\lambda} \cdot \frac{1}{z - y_\lambda},$$

wo sich das Summenzeichen auf alle Werthe von λ: $1, 2, \dots n$ bezieht, eine von y_h und z_h, und da dasselbe in Bezug auf die Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$, so wie in Bezug auf die Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$ symmetrisch ist und t gar nicht darin vorkommt, eine von allen diesen Variabeln unabhängige Gröfse.

Da dieser Ausdruck, in Bezug auf die ganz beliebige Gröfse z, eine ganze Function vom $(n-1)$ten Grade ist und seine Coëfficienten constant sind, so hat man die Gleichung

$$C_0+C_1 z+C_2 z^2+\ldots+C_{n-1} z^{n-1} = Fz\,\Sigma\frac{2z_\lambda^2 f y_\lambda-\psi_\lambda y_\lambda}{F' y_\lambda}\,\frac{1}{z-y_\lambda},$$

woraus die Integralgleichungen

$$2z_\lambda^2 f y_\lambda-\psi_\lambda y_\lambda = C_0+C_1 y_\lambda+C_2 y_\lambda^2+\ldots+C_{n-1} y_\lambda^{n-1},$$

wo für λ, 1, 2, ... n gesetzt werden kann, mit n willkürlichen Constanten hervorgehn. Mit Hinzuziehung der obigen Gleichung

$$z_\lambda = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{dy_\lambda}{dt}\right)},$$

welche nach Gleichung (*B.*) folgende liefert,

$$z_\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{F' y_\lambda}{f y_\lambda}\frac{dy_\lambda}{dt},$$

geht die vorige Integralgleichung in folgende über:

$$\frac{\frac{dy_\lambda}{dt}}{\sqrt{(f y_\lambda(C+C_1 y_\lambda+C_2 y_\lambda^2+\ldots+C_{n-1} y_\lambda^{n-1}+\psi_\lambda y_\lambda))}} = \frac{1}{F' y_\lambda}.$$

Hieraus ergeben sich endlich, wenn man statt λ, 1, 2, ... n setzt, wegen der identischen Gleichungen

$$\Sigma\frac{1}{F' y_\lambda} = 0, \quad \Sigma\frac{y_\lambda}{F' y_\lambda} = 0, \quad \ldots \quad \Sigma\frac{y_\lambda^{n-2}}{F' y_\lambda} = 0, \quad \Sigma\frac{y_\lambda^{n-1}}{F' y_\lambda} = 1,$$

nach der Integration die endlichen Integralgleichungen:

$$\Sigma\int\frac{dy_\lambda}{\sqrt{(f y_\lambda(C_0+C_1 y_\lambda+\ldots+C_{n-1} y_\lambda^{n-1}+\psi_\lambda y_\lambda))}} = c_0,$$

$$\Sigma\int\frac{y_\lambda\,dy_\lambda}{\sqrt{(f y_\lambda(C_0+C_1 y_\lambda+\ldots+C_{n-1} y_\lambda^{n-1}+\psi_\lambda y_\lambda))}} = c_1,$$

etc.

$$\Sigma\int\frac{y_\lambda^{n-2}\,dy_\lambda}{\sqrt{(f y_\lambda(C_0+C_1 y_\lambda+\ldots+C_{n-1} y_\lambda^{n-1}+\psi_\lambda y_\lambda))}} = c_{n-2},$$

$$\Sigma\int\frac{y_\lambda^{n-1}\,dy_\lambda}{\sqrt{(f y_\lambda(C_0+C_1 y_\lambda+\ldots+C_{n-1} y_\lambda^{n-1}+\psi_\lambda y_\lambda))}} = t+c_{n-1},$$

welche mit den von *Liouville* gefundenen übereinstimmen.

Königsberg, den 10ten December 1849.

15.

Zwei geometrische Sätze.

(Von Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

I.

Die Summe des Inhalts der vier, die Seiten eines Dreiecks tangentirenden Kreise soll das $n$fache des Inhalts des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises sein: welches ist die diese Bedingung aussprechende Gleichung zwischen n und den drei Winkeln α, β, γ des Dreiecks, und welches sind für bestimmte Formen desselben die Grenzwerthe von n?

Die allgemeine Relation ist

$$n = 8(1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Aus ihr folgt:

1) Der kleinste Werth von n ist 7 und entspricht dem gleichseitigen Dreieck.
2) Der nicht zu erreichende Grenzwerth von n ist 16.
3) Für jedes rechtwinkliche Dreieck ist $n=8$.
4) Für jedes gleichschenkliche Dreieck ist, wenn α einen der spitzen Winkel bezeichnet,

$$n = 8(1+\cos^2\alpha.\cos2\alpha).$$

5) Für jedes gleichschenklich-spitzwinkliche Dreieck sind 7 und 8 die Grenzwerthe für n.
6) Für jedes gleichschenklich-stumpfwinkliche Dreieck sind 8 und 16 die Grenzwerthe für n.
7) Für jedes ungleichseitige spitzwinkliche Dreieck sind $8(1-\cos\alpha\sin^2\frac{1}{2}\alpha)$ und 8 die Grenzwerthe von n. (α wie in (4) verstanden.)
8) Für jedes ungleichseitige stumpfwinkliche Dreieck werden 8 und $8(1+\cos\alpha\sin^2\frac{1}{2}\alpha)$ diese Grenzwerthe. (Immer α als spitzen Winkel angenommen.)
9) Unter bleibender Bedeutung von α finden sich in (7. und 8.) die beiden andern Winkel aus $\beta+\gamma=\pi-\alpha$ und $\cos(\beta-\gamma)=\cos\alpha+\frac{8-n}{4\cos\alpha}$.

II.

Für dieselbe Aufgabe in Beziehung auf die Peripherien der Kreise dient die allgemeine Gleichung

$$n = 4(1+2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Aus ihr folgt:

1) Der gröfste Werth für n ist 5 und entspricht dem gleichseitigen Dreiecke.
2) Der nicht zu erreichende Grenzwerth von n ist 4.
3) Für das rechtwinkliche Dreieck folgt (α spitz angenommen)

$$n = 2(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$$

und es wird

$$n = 2+2\sqrt{2}$$

ein Maximum zu $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.

4) Für das gleichschenkliche Dreieck wird (α spitz angenommen)

$$n = 4(\cos\alpha+\sin^2\alpha).$$

5) Für das gleichschenklich-spitzwinkliche Dreieck sind $2+2\sqrt{2}$ und 5 die Grenzwerthe von n.
6) Für das gleichschenklich-stumpfwinkliche Dreieck sind dieselben 4 und $2+2\sqrt{2}$.
7) Für das ungleichseitige Dreieck finden sich (α spitz angenommen) die beiden andern Winkel aus

$$\beta+\gamma = \pi-\alpha \quad \text{und} \quad \sin(\tfrac{1}{2}\alpha+\beta) = \frac{n-4\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Berlin, im Februar 1850.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 40. Heft 2.

Fac-simile einer Handschrift von Bailly.

Monsieur

je viens de reconnaître, en relisant ~~lettre~~ la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, que j'avais oublié de vous envoyer le reçu que vous m'avez demandé pour la médaille, je me hâte de réparer cette faute, en vous l'envoyant dans cette lettre.

Je suis avec respect

Monsieur

votre très humble et
très obéissant serviteur

Bailly

a paris ce 26 juin 1768.

16.

Über einige von Herrn Dr. Eisenstein aufgestellte Lehrsätze, irreductible Congruenzen betreffend (S. 182 Bd. 39 dieses Journals).

(Von Herrn Prof. Dr. *Schönemann* zu Brandenburg a. d. H.)

I. **Aufgabe.** Wenn $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$, so wie $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$ gegebene ganze Zahlen bedeuten, $fx \equiv 0 \pmod{p}$ eine irreductible Congruenz vom $n$ten Grade und α eine Wurzel der Gleichung $fx \equiv 0$ ist, so ist zu untersuchen, in welchen Fällen sich β als Function von α so bestimmen läfst, dafs es der Congruenz $a_0\alpha + a_1\alpha + \dots a_{n-1}\alpha^{n-1} \equiv b_0\beta + b_1\beta^p + b_2\beta^{p^2} + \dots$ .. $b_{n-1}p^{n-1}$ genügt, und in welchen Fällen für β verschiedene Functionen von α eintreten können.

Auflösung. Setzt man $a_0\alpha + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots a_{n-1}\alpha^{n-1} = (K\alpha)$, so erhält man durch Potenziiren und in Berücksichtigung, dafs $\beta^{p^n} \equiv \beta \pmod{p, \alpha}$ ist, folgendes System von Congruenzen:

$$
\begin{aligned}
b_0\beta + b_1\beta^p + b_1\beta^{p^2} + \dots + b_{n-1}\beta^{p^{n-1}} &\equiv (K\alpha) \\
b_{n-1}\beta + b_0\beta^p + b_1\beta^{p^2} + \dots + b_{n-2}\beta^{p^{n-1}} &\equiv (K\alpha)^p \\
b_{n-2}\beta + b_{n-1}\beta^p + b_0\beta^{p^2} + \dots + b_{n-3}\beta^{p^{n-2}} &\equiv (K\alpha)^{p^2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_1\beta + b_2\beta^p + b_3\beta^{p^2} + \dots + b_0\beta^{p^{n-1}} &\equiv (K\alpha)^{p^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Congruenzen ist nun klar, dafs sich im Allgemeinen β durch $(K\alpha), (K\alpha)^p, \dots (K\alpha)^{p^{n-1}}$, und zwar nur auf eine Weise werde darstellen lassen. Doch würde es unrichtig sein, anzunehmen, dafs dies ohne Ausnahme geschehen könne. Hiezu müfste erst nachgewiesen werden, dafs nicht irgend eine der aufgestellten Congruenzen sich als eine Folge gewisser anderer, oder aber auch mit gewissen andern in Widerspruch stehend ergeben könnte. Im ersten Falle würde es verschiedene Functionem β geben, die der Aufgabe Genüge leisten, im andern keine. Glücklicherweise ist die Form dieser Congruenzen von der Art, dafs sie eine übersichtliche Auflösung gestatten, so dafs man aus derselben die Kennzeichen für die Ausnahme-Fälle wird aufstellen können. Ist nämlich w eine $n$te Wurzel der Einheit und man multiplicirt diese Congruenz mit w^{ui},

die zweite mit w^i, die dritte mit w^{2i}, etc. und addirt sämmtliche Congruenzen, indem man dem i alle Werthe von 0, 1, 2, ... $n-1$ beilegt, so erhält man folgendes System von Congruenzen:

$$(b_0 + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots b_1)(\beta + \beta^p + \beta^{p^2} + \dots \beta^{p^{n-1}})$$
$$\equiv (K\alpha) + (K\alpha)^p + \dots (K\alpha)^{p^{n-1}}$$
$$(b_0 + b_{n-1}w + b_{n-1}w + \dots b_1 w^{n-1})(\beta + \beta^p w + \beta^{p^2} w^2 + \dots \beta^{p^{n-1}} w^{n-1})$$
$$\equiv (K\alpha) + (K\alpha)^p w + \dots (K\alpha)^{p^{n-1}} w^{n-1}$$

. . . .

$$(b_0 + b_{n-1}w^{n-1} + b_{n-2}w^{2(n-1)} + \dots b_1 w^{(n-1)^2})(\beta + \beta^p w^{n-1} + \dots \beta^{p^{n-1}} w^{(n-1)^2})$$
$$\equiv (K\alpha) + (K\alpha)^p w^{n-1} + \dots (K\alpha)^{p^{n-1}} w^{(n-1)^2}.$$

Diese Congruenzen werden eine und nur eine Auflösung gestatten, wenn $(b_0 + b_{n-1} + \dots b_1)(b_0 + b_{n-1}w + \dots b_1 w^{n-1}) \dots (b_0 + b_{n-1}w^{n-1} + \dots b_1 w^{(n-1)^2})$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Sobald aber dieser Fall eintritt, ist es zweifelhaft, ob es nur eine Auflösung für β gebe, oder mehrere, oder gar keine. So ist es insbesondere klar, dafs, wenn $(K\alpha) + (K\alpha)^p + \dots + (K\alpha)^{p^{n-1}}$ nicht $\equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ ist, wohl aber $b_0 + b_{n-1} + \dots b_1 \equiv 0 \pmod{p}$, für β keine Auflösung existiren könne. Ist aber $b_0 + b_{n-1} + \dots b_1$ zugleich mit $(K\alpha) + (K\alpha)^p + \dots (K\alpha)^{p^{n-1}} \equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ und $(b_0 + b_{n-1}w + \dots b_1 w^{n-1}) \dots$ $\dots (b_0 + b_{n-1}w^{n-1} + \dots b_1 w^{(n-1)^2})$ nicht $\equiv 0 \pmod{p, \alpha}$, so giebt es für $\beta, \beta^p, \dots \beta^{p^{n-1}}$ nur $n-1$ lineäre Congruenzen, und da man nun die Summe dieser Ausdrücke einer der Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ congruent setzen kann, so wird es offenbar für β in diesem Falle p verschiedene Auflösungen geben. Zur vollständigen Beantwortung der Frage wird man gelangen, wenn man w als Wurzel der Congruenz $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ansieht und sowohl α als w als Functionen der Wurzeln einer irreductibeln Congruenz $yx \equiv 0 \pmod{p}$ auffafst.

Untersuchen wir jetzt die Frage, ob $b_0\beta + b_1\beta^p + \dots b_{n-1}\beta^{p^{n-1}}$ immer ein vollständiges Restensystem gebe, wenn man für $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$ alle möglichen Werthe der Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ setzt. Hier ist zunächst zu bemerken, dafs, wenn n keine Primzahl und n_1 ein Factor von n ist, β von einer irreductibeln Congruenz vom Grade n_1 abhangen kann. Da aber dann von den Werthen $\beta, \beta^p, \dots \beta^{p^{n-1}}$ je $\frac{n}{n_1}$ zusammenfallen, so kann jenes Restensystem höchstens $p^{\frac{n}{n_1}}$ verschiedene Reste fassen, also nicht vollständig sein, indem das vollständige System p^n Reste in sich schliefst. Wenn aber β von einer Congruenz $n$ten Grades abhangt, so müfste nachgewiesen werden,

dafs, wenn $b_0\beta + b_1\beta^p + \dots b_{n-1}\beta^{p^{n-1}} \equiv c_0\beta + c_1\beta^p + \dots c_{n-1}\beta^{p^{n-1}}$ (mod. p, α) ist, $b_0 \equiv c_0$, $b_1 \equiv c_1$, etc. (mod. p) sein müfste, oder dafs, wenn $m_0\beta + m_1\beta^p + \dots + m_{n-1}\beta^{p^{n-1}} \equiv 0$ (mod. p, α) ist und $m_0, m_1, \dots m_{n-1}$ bedeuten ganze Zahlen, m_0, m_1, etc. einzeln $\equiv 0$ (mod. p) sein müssen. Dieser Satz kann offenbar wieder nur unter der Beschränkung gelten, dafs $\beta + \beta^p + \dots \beta^{p^{n-1}}$ nicht $\equiv 0$ (mod. p, α) ist. Unter dieser Voraussetzung läfst sich der Satz leicht beweisen, wenn p eine primitive Wurzel der Congruenz $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. n) und n eine Primzahl ist. In diesem Falle ist $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. p) eine irreductible Congruenz, und keiner der Factoren $m_0 + m_1 w + \dots m_{n-1} w^{n-1}$ kann $\equiv 0$ (mod. p, w) werden. (S. §. 50. der citirten Abhandlung.)

Setzt man nun in das oben aufgestellte System linearer Gleichungen 0 statt $K\alpha$, so mufs jeder der Ausdrücke $\beta + \beta^p w + \dots \beta^{p^{n-1}} w^{n-1} \equiv 0$ (mod. p, α) werden. Da nun aber $\beta + \beta^p + \dots \beta^{p^{n-1}}$ irgend einer ganzen Zahl n (mod. p) congruent werden mufs, so würde man durch Addition aller dieser Gleichungen $n\beta \equiv n$ (mod. p, α) erhalten; was der Voraussetzung widerspricht, dafs β von einer irreductibeln Congruenz $n$ten Grades abhangt.

Obgleich dieser Satz unter der gemachten Einschränkung wahrscheinlich allgemein richtig ist, so fehlt doch noch der allgemeine Beweis.

II. Es ist $\alpha + w\alpha^p + w^2\alpha^{p^2} + \dots w^{n-1}\alpha^{p^{n-1}} \equiv w(\alpha^p + w\alpha^{p^2} + \dots + w^{n-2}\alpha^{p^{n-2}} + w^{n-1}\alpha^{p^n})$ (mod. p, α), da $w^n = 1$ und $\alpha^{p^n} \equiv \alpha$ (mod. p, α) ist. Setzt man nun $\alpha + w\alpha^p + \dots w^{n-1}\alpha^{p^{n-1}} = f_1(\alpha, w)$, so hat man $f_1(\alpha, w) \equiv w f_1(\alpha^p, w) \equiv w^m f_1(\alpha^{p^m}, w)$, wo m irgend eine ganze Zahl bedeuten kann. Sind nun $w_1, w_2, \dots w_q$ verschiedene Wurzeln der Einheit, von der Art, dafs $w_1, w_2, \dots w_q = 1$ ist, so hat man $f_1(\alpha, w_1) f_1(\alpha, w_2) \dots f_1(\alpha, w_q) = w_1 w_2 \dots w_q f_1(\alpha^p, w_1) f(\alpha^p, w_2) \dots f(\alpha^p, w_q) = f_1(\alpha^p, w_1) f(\alpha^p, w_2) \dots f(\alpha^p, w_q)$. Setzt man $f(\alpha, w_1) f(\alpha, w_2) \dots f(\alpha, w_q) = \Pi(\alpha, w)$, so ergiebt sich $\Pi(\alpha, w) \equiv \Pi(\alpha^p, w) \dots \equiv \Pi(\alpha^{p^{n-1}}, w)$. Da sich nun die Summe der letzten Ausdrücke aus den Coëfficienten der Gleichung $fx = 0$ bestimmen läfst, so gilt Dasselbe auch für jeden einzelnen Ausdruck, so lange n nicht ein Vielfaches von p wird. Für diesen Fall ist der gegebene Beweis nicht genügend.

Notiz.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Schönemann* zu Brandenburg a. d. H.)

Herr Dr. *Eisenstein* stellt in seiner Abhandlung über die Lemniscatentheilung (im 2ten Hefte Band 39 Seite 166 dieses Journals) den Satz auf, dafs die Gleichung $Fx = 0$ irreductibel sei, wenn der Coëfficient der höchsten Potenz von $x = 1$ und alle übrigen ganzzahligen Coëfficienten durch eine reelle oder complexe Primzahl aufgehen, der letzte aber nicht durch das Quadrat dieser Primzahl theilbar ist. Mit Hülfe dieses Satzes beweiset er die Irreductibilität der Gleichung $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, wenn p eine Primzahl ist. Da Herr *Eisenstein* ausdrücklich bemerkt, dafs ihm von letzterem Satze nur der Beweis von *Gaufs* und von *Kronecker* bekannt sei, so sehe ich mich veranlafst, daran zu erinnern, dafs ich bereits im Bande 31 dieses Journals §. 6, in meiner Abhandlung „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höhern Congruenzen etc." den ersten Satz für reelle Primzahlen bewiesen und auch den folgenden aus demselben abgeleitet habe und dafs ferner die von Herrn etc. *Eisenstein* angewendete Methode nicht wesentlich von der meinigen verschieden ist. Von dem letztern Satze habe ich übrigens noch einen ganz verschiedenen Beweis im ersten Theile und §. 50 derselben Abhandlung gegeben.

Brandenburg a. d. H., den 14ten December 1849.

17.

Remarques sur le calcul dont a fait usage Mr. l'éditeur du Journal dans son mémoire:

„Sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphèrique comme force motrice sur les chemins de fer." (Vol. 32. de l'an 1846.)

(Par Mr. *Prehn* à Ratzeburg.)

Après avoir enoncé page 16 l'opinion que l'abaissement de la température ne diminue que très peu l'élasticité de l'air, l'auteur a fondé les calculs des effets des divers systèmes de machines et de l'effort nécessaire pour la raréfaction et la compression de l'air, sur la supposition simple, que l'élasticité de l'air ne dépend que de sa densité. Dans une partie de ces calculs l'élasticité de l'air se trouve réellement invariable, et dans presque tous les autres calculs l'admission de l'hypothèse est tout-à-fait justifiée, parceque les variations, de température, bien qu'inévitables, sont resserrées dans des limites très étroites: seulement dans le calcul de l'effet des locomotives à air de la seconde espèce, il parait nécessaire de tenir compte des variations de la température. Mais comme l'auteur est arrivé au résultat final, que les machines de cette espèce sont de beaucoup préférables à touts les autres moyens traités dans cet ouvrage, ce calcul est le point le plus essentiel de l'ouvrage entier.

Pour prouver, qu'il est nécessaire, dans ce cas, d'employer des formules plus conformes aux lois de la nature, je vais comparer les valeurs, que l'auteur a trouvées page 242 pour le rapport $\frac{M}{M'}$ (rapport du moment d'une locomotive de seconde espèce au moment d'une locomotive de première espèce) aux valeurs correspondantes, qu'on trouve en conformant le calcul aux circonstances véritables. Il ne sera pas difficile d'apprécier l'influence, que l'application du même principe aux calculs suivants devra exercer sur le résultat définitif.

En suivant la marche de l'auteur page 239, on trouve pour la partie constante du moment, correspondante à l'intervalle $x = 0$ jusqu'à $x = k$:

$$(1.) \qquad M_1 = \tfrac{1}{4}\pi\Delta^2\mu\sigma k$$

pour un cylindre, conformément au texte. Pour calculer la partie variable

du moment $= M_2$, il faut observer, que l'élasticité U d'une masse d'air atmosphèrique, dont la densité $= D$ et dont la température $= T$, s'exprime par la formule

$$(2.)\quad U = (1+\omega T)D,$$

où ω désigne le coëfficient de dilatation de l'air atmosphèrique, que nous prendrons constant et

$$(3.)\quad \omega = 0{,}00366,$$

et T doit être exprimé en degrés centésimaux. La densité variant et devenant $= d$, la température et l'élasticité varient aussi et deviennent t et u, et la loi, suivant laquelle cette variation a lieu, s'exprime par l'équation connue:

$$(4.)\quad 1+\omega t = (1+\omega T)\left(\frac{d}{D}\right)^{0,421}$$

qui donne

$$(5.)\quad u = (1+\omega t)d = (1+\omega T)D\cdot\left(\frac{d}{D}\right)^{1,421}$$

Dans le cas proposé on a

$$(6.)\quad U = 1+\mu,$$

et T étant la température de l'air du réservoir, supposée égale à la température de l'atmosphère, on a

$$(7.)\quad D = \frac{1+\mu}{1+\omega T}.$$

La densité variant en raison inverse des espaces parcourus par le piston, on trouve

$$(8.)\quad d = D\cdot\frac{k}{x} \quad \text{et}$$

$$(9.)\quad dM_2 = \tfrac{1}{4}\pi\Delta^2\sigma\left[(1+\mu)\left(\frac{k}{x}\right)^{1,421}-1\right]dx$$

et par conséquent on aura l'intégrale

$$(10.)\quad M_2 = \tfrac{1}{4}\pi\Delta^2\sigma\left[\text{const.}-\frac{(1+\mu)k}{0{,}421}\left(\frac{k}{x}\right)^{0,421}-x\right].$$

Un raisonnement analogue à celui du texte, montre que l'on obtiendra l'effet maximum, en faisant aller le piston jusqu'au point $x = \lambda$, où l'élasticité de l'air atteint la valeur σ de la pression atmosphèrique. Pour déterminer la valeur correspondante de k, on a l'équation

$$(11.)\quad (1+\mu)\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{1,421} = 1, \text{ d'où}$$

$$(12.)\quad k = \frac{\lambda}{(1+\mu)^{\frac{1}{1,421}}}.$$

En prenant donc l'intégrale dans les limites $x = \frac{\lambda}{(1+\mu)^{\frac{1}{1,421}}}$ et $x = \lambda$, on trouve, réduction faite, le moment maximum pour un cylindre:

$$(13.)\quad M_2 = \tfrac{1}{2}\pi\Delta^2\sigma\lambda\left[\frac{1}{0,421}(1+\mu)^{\frac{0,421}{1,421}} + \frac{1}{(1+\mu)^{\frac{1}{1,421}}} - \frac{1,421}{0,421}\right].$$

Or on a déjà, en substituant la valeur de k pour le maximum d'effet,

$$(14.)\quad M_1 = \tfrac{1}{2}\pi\Delta^2\sigma\lambda\cdot\frac{\mu}{(1+\mu)^{\frac{1}{1,421}}}$$

également pour un cylindre: donc le moment total $M_1 + M_2 = M$ pour deux cylindres sera

$$(15.)\quad M = \frac{1,421}{0,421}\pi\Delta^2\sigma\lambda\left[(1+\mu)^{\frac{0,421}{1,421}} - 1\right].$$

C'est le maximum de moment que la masse d'air atmosphèrique

$$(16.)\quad a = \pi\Delta^2\cdot\frac{1+\mu}{1+\omega T}\cdot k = \pi\Delta^2\lambda\frac{(1+\mu)^{\frac{0,421}{1,421}}}{1+\omega T}$$

(de la température T) pourra produire. En substituant la valeur de $\pi\Delta^2\lambda$, on aura aussi

$$(17.)\quad M = \frac{1,421}{0,421}a\sigma(1+\omega T)\left[1 - \frac{1}{(1+\mu)^{\frac{0,421}{1,421}}}\right].$$

D'un autre côté le moment d'une locomotive de la première espèce est

$$(18.)\quad M' = \pi\Delta^2\mu\lambda\sigma$$

et la masse d'air correspondante, en supposant sa température égale à T, étant

$$(19.)\quad \pi\Delta^2\cdot\frac{1+\mu}{1+\omega T}\cdot\lambda = a', \text{ et } = a$$

par supposition, on aura

$$(20.)\quad M' = a\sigma(1+\omega T)\frac{\mu}{1+\mu}.$$

On trouve donc le rapport

$$(21.)\quad \frac{M}{M'} = \frac{1,421}{0,421}\,\frac{(1+\mu)-(1+\mu)^{\frac{1}{1,421}}}{\mu},$$

et cette formule donne la table suivante:

(22.)

pour $\mu =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{M}{M'} =$	1,408	1,516	1,600	1,668	1,725	1,774	1,817	1,854	1,888

qui diffère considérablement de la table du texte, qui suivant la formule

$$(23.)\qquad \frac{M}{M'} = \frac{1+\mu}{\mu}\,\text{log. nat.}(1+\mu)$$

donne pour

$$(24.)\quad \begin{cases} \mu = & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{M}{M'} = & 1{,}648 & 1{,}848 & 2{,}012 & 2{,}150 & 2{,}270 & 2{,}377 & 2{,}472 & 2{,}558 & 2{,}637. \end{cases}$$

La différence entre les nombres des deux tables varie pour les valeurs $\mu = 2$ jusqu'à $\mu = 10$ entre 17 et 40 pour cent, et si l'on admettait même la valeur $\mu = 14$ (cf. page 326), la différence dans ce cas serait encore plus grande.

Or le calcul de M' est exact: c'est donc la valeur du moment M des locomotives de la seconde espèce, dans laquelle l'erreur se trouve.

En effet, quand de l'air comprimé d'une fort élasticité, par exemple de 10 atmosphères, se dilate subitement jusqu'à l'équilibre avec la pression atmosphérique, il est nécessaire que sa température s'abaisse très considérablement, et si la température initiale de l'air comprimé, n'excède pas la température ordinaire de l'atmosphère, la température de l'air dilaté, si elle pouvait être observée, serait marquée par des degrés de froid jusqu'ici inconnus; comme on le trouvera facilement en tirant des équations données la valeur finale de t.

On pourrait peut-être penser, que l'air, en se dilatant, regagnerait aussitôt la plus grande partie de sa température par la communication de chaleur qui lui serait communiquée par les parois du cylindre, de sorte que le résultat du calcul ne se trouverait pas d'accord avec la réalité; mais ce serait une grave erreur. Il n'y a point de doute qu'une communication de chaleur ne s'opère; mais l'effet de cette communication dans la courte durée d'un coup de piston ne pourra pas être très sensible, à cause de la non-conductibilité de l'air relativement à la chaleur: et comme à la valeur $x = k$, où la dilatation commence, la marche du piston est déjà rapide et continue de l'être pendant l'intervalle, dans lequel la plus grande partie du moment se développe, l'effet de la communication de chaleur ne changera pas sensiblement la valeur du moment total indiquée par la théorie.

Au surplus, je peux assurer, que dans des expériences analogues, que j'ai faites sur la dilatation subite d'air comprimé dans un cylindre en cuivre, j'ai eu occasion de constater l'existence réelle de degrés extraordinaires de froid, qui n'ont différé que très peu du résultat de la théorie.

Berlin le 22 Mars 1850.

Additions de l'éditeur de ce journal aux remarques précédentes.

1. Ces remarques ont pour bût de faire voir qu'à cause du refroidissement que l'air comprimé subit en se dilatant subitement, et à cause de la diminution de la tension de l'air dilaté produite par ce refroïdissement, l'effet de la *détente* dans les locomotives à air comprimé, est moins et beaucoup moins avantageux que l'éditeur du journal ne l'a calculé dans le mémoire cité suivant la seule loi de *Mariotte*.

Les calculs et les résultats de l'auteur sont parfaitement justes, autant que l'équation (4.), qui exprime l'influence des variations de la température, produite par la dilatation et la compression de l'air, sur sa tension, l'est aussi.

2. Le bût principal du mémoire de l'éditeur étant de prouver que l'ai comprimé *offre une force motrice meilleure et plus-avantageuse que la vapeur d'eau pour les chemins de fer:* il croit que le meilleur parti à prendre pour arriver à une solution sur ce point *principal,* sera d'adopter *pour le moment* l'équation (4.) et les résultats de l'auteur, *purement et tels qu'ils sont,* sans aucune objection, et de voir ce qu'on trouvera en suivant ces principes pour les chemins de fer, et nommément dans le même exemple sur lequel l'éditeur a appliqué ses propres principes (tome 32 page 326 §. 67.).

3. Posons, pour abréger, l'exposant dans (4.),

$$(25.)\qquad 0,421 = \varepsilon,$$

on obtient d'abord pour un k indéterminé et pour un seul cylindre, suivant (10.):

$$(26.)\qquad M_2 = \tfrac{1}{2}\pi\varDelta^2\sigma\Big[\text{const.} - \frac{(1+\mu)k}{\varepsilon}\Big(\frac{k}{x}\Big)^{\varepsilon} - x\Big].$$

Cela donne, M_2 étant $=0$ pour $x=k$, const. $=\frac{(1+\mu)k}{\varepsilon}+k$, donc

$$(27.)\qquad M_2 = \tfrac{1}{2}\pi\varDelta^2\sigma\Big[\frac{(1+\mu)k}{\varepsilon}\Big(1-\Big(\frac{k}{x}\Big)^{\varepsilon}\Big)+k-x\Big],$$

et pour le cylindre *entier,* c'est à dire pour $x=\lambda$,

$$(28.)\qquad M_2 = \tfrac{1}{2}\pi\varDelta^2\sigma\Big[\frac{(1+\mu)k}{\varepsilon}\Big(1-\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^{\varepsilon}\Big)+k-\lambda\Big].$$

Y ajoutant $M_1 = \frac{1}{2}\pi\varDelta^2\mu\sigma k$, on a pour les *deux* cylindres:

$$M = M_1 + M_2 = \pi\varDelta^2\sigma\Big[\frac{(1+\mu)k}{\varepsilon}\Big(1-\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^{\varepsilon}\Big)+(1+\mu)k-\lambda\Big] \text{ ou bien}$$

$$(29.)\qquad M = \pi\varDelta^2\sigma\Big[\frac{(1+\mu)k}{\varepsilon}\Big(1+\varepsilon-\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^{\varepsilon}-\lambda\Big)\Big].$$

4. Maintenant, si la machine est arrangée de sorte que le maximum de l'effet a lieu pour la tension μ_1 de lair, comme l'éditeur l'a supposé (§. 47. p. 242), il faut qu'ici suivant (12.), la détente soit

$$(30.)\quad k = \frac{\lambda}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}.$$

Cela, substitué dans (29.), donne

$$M = \pi\Delta^2\sigma\left[\frac{(1+\mu)\lambda}{\varepsilon(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\left(1+\varepsilon-(1+\mu)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)-\lambda\right] \text{ ou bien}$$

$$(31.)\quad M = \pi\Delta^2\sigma\lambda\left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\left(\frac{1+\varepsilon}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}-\frac{1}{1+\mu_1}\right)-1\right]$$

$$= \frac{\pi\Delta^2\lambda\sigma(1+\mu)}{\varepsilon}\left[\frac{1+\varepsilon}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}-\frac{1}{1+\mu_1}\right]-\pi\Delta^2\sigma\lambda.$$

Voilà le *moment de force* d'un air comprimé jusqu'à la tension $1+\mu$, si la détente $k = \frac{\lambda}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}$ (30.) est telle que la machine a son effet maximum sous une tension $1+\mu_1$ de l'air.

5. La masse a d'air atmosphérique nécessaire pour produire ce moment de force, est suivant (16.)

$$(32.)\quad a = \pi\Delta^2\frac{1+\mu}{1+\omega T}\cdot k = \pi\Delta^2\frac{1+\mu}{1+\omega T}\cdot\frac{\lambda}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} \quad (30.).$$

Delà on tire

$$(33.)\quad \pi\Delta^2\lambda(1+\mu) = a(1+\omega T)(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}},$$

et substitué dans (31.),

$$M = \frac{a\sigma(1+\omega T)(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{\varepsilon}\left[\frac{1+\varepsilon}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}-\frac{1}{1+\mu_1}\right]-\pi\Delta^2\sigma\lambda, \text{ ou bien}$$

$$(34.)\quad M = \frac{a\sigma(1+\omega T)}{\varepsilon}\left[1+\varepsilon-(1+\mu_1)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right]-\pi\Delta^2\sigma\lambda.$$

Cela donne

$$(35.)\quad a = \frac{\varepsilon(M+\pi\Delta^2\lambda\sigma)}{1+\varepsilon-(1+\mu_1)^{-\frac{1}{1+\varepsilon}}}$$

pour la masse d'air *atmosphérique* qui, comprimé jusqu'à une tension *quelconque* $1+\mu$, produit le moment de force M, la machine étant arrangée pour

la détente $k = \frac{\lambda}{(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}$, de sorte que le maximum d'effet a lieu sous la tension $1+\mu_1$.

6. Si aucune détente n'avait lieu, c'est à dire si k était $=\lambda$, et par conséquent suivant (30.) $(1+\mu_1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} = 1$, et $1+\mu_1 = 1$, il y auroit à mettre

$$(36.)\quad \mu_1 = 0.$$

Pour produire dans ce cas le *même* moment de force M par une tension quelconque $1+\mu$ de l'air, comme cela doit avoir lieu sur les chemins de fer, où le moment de la force est déterminé par la force nécessaire de traction d'un train de wagons, et où μ est variable suivant les pentes de la voie, ce n'est plus la masse a (35.) d'air atmosphérique qui y suffit: c'est plutôt la masse d'air

$$(37.)\quad a_1 = \frac{\varepsilon(M+\pi\Delta^2\lambda\sigma)}{1+\varepsilon-1} = M+\pi\Delta^2\sigma\lambda,$$

comme (35.) la donne en mettant dans cette expression $\mu_1 = 0$.

Donc *avec* détente, la masse d'air atmosphérique nécessaire pour produire le moment M, n'est que

$$(38.)\quad \frac{a}{a_1} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon-(1+\mu_1)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}}\ \textit{fois}\ \text{celle}\ \textit{sans}\ \text{détente.}$$

7. Cette expression, tirée de la formule (4.), prend ici la place de celle

$$(39.)\quad \frac{1}{\text{log. nat.}(1+\mu_1)+1}$$

dans (§. 54. *G.* page 258) du mémoire de l'éditeur. Cette dernière expression peut aussi être tirée de (38.), en y donnant à ε la valeur 0, valeur que ε prend si l'on néglige l'effet de la variation de la température de l'air, produite par la dilatation subite, comme l'éditeur l'a fait dans son mémoire. Pour $\varepsilon = 0$ (38.) donne $\frac{a}{a_1} = \frac{0}{0}$, donc

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\left[1+\varepsilon-(1+\mu_1)^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}\right]} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon-\partial(1+\mu_1)^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}}.$$

Fésant pour abréger $1+\mu_1 = c$ et $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = z$, on a $(1+\mu_1)^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}} = \frac{1}{c^z}$, dont la différentielle est

$$-\frac{\partial c^z}{c^{2z}} = -\frac{\partial z . c^z \log. \text{nat.} c}{c^{2z}} = -\frac{\partial z \log. \text{nat.} c}{c^z}$$

$$= -\left[\frac{\partial \varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon \partial \varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right] \frac{\log. \text{nat.}(1+\mu_1)}{(1+\mu_1)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}} = -\frac{\partial \varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \cdot \frac{\log. \text{nat.}(1+\mu_1)}{(1+\mu_1)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}},$$

donc

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \cdot \frac{\log. \text{nat.}(1+\mu_1)}{(1+\mu_1)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}}},$$

et pour $\varepsilon = 0$,

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{1+\log. \text{nat.}(1+\mu_1)};$$

comme (39.).

8. Les résultats des deux formules (38. et 39.) sont les suivants. Elles donnent

(40.)	Pour $\mu_1 =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	∞
1.	$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon-(1+\mu_1)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}} =$	1	0,6940	0,6024	0,5555	0,5261	0,5055	0,4900	0,4779	0,4681	0,4599	0,4529	...	0,29627
2.	$\frac{1}{1+\log.\text{nat.}(1+\mu_1)} =$	1	0,5907	0,4768	0,4191	0,3833	0,3581	0,3394	0,3248	0,3128	0,3028	0,2943	...	0.

Les nombres (40. 2.) sont ceux de (398. §. 49. p. 251) du mémoire.

9. Maintenant on pourra calculer selon la formule (38.) les résultats qui auront lieu pour le chemin de fer que l'éditeur a pris pour *exemple* dans son mémoire (§. 67. p. 326), pour le cas où l'on ne néglige pas l'effet de la diminution de la tension de l'air dilaté après la détente, produite par la refroidissement, en tenant compte de cette diminution suivant l'expression (4.).

Si la locomotive à air *n'avait pas de détente,* 1770 met. cub. d'air atmosphérique seraient nécessaire pour un poids de 92 770 kilogr. du train (voir §. 64. *A.* et *B.* p. 317). Cet air, comprimé à une tension convenable, doit être amené par la locomotive et son tender.

En supposant, comme dans (§. 67. *A.* p. 326), *une détente* de

$$(41.) \quad \mu_1 = 3,$$

la masse d'air atmosphérique nécessaire pour la trajet n'est que de

$$(42.) \quad 1770 . 0,4191 = 742 \text{ met. cub.}$$

(571. p. 326), en *négligeant* l'effet du refroidissement de l'air dilaté, suivant la formule (39.). En *ne négligeant pas* cet effet, et en en tenant compte

suivant (4.), la masse d'air atmosphérique nécessaire est suivant (40. 1.)

$$(43.) \quad 1770.0{,}5555 = 983 \text{ met. cub.},$$

donc

$$(44.) \quad \frac{983}{742} = 1{,}325 \textit{ fois} \text{ la masse } (42.).$$

10. Supposant, comme (§. 67. p. 326) que l'air dans les cylindres-réservoirs, repartis sur la locomotive et les tenders, doit avoir une tension effective de 8 atmosphères, il sera maintenant nécessaire:

(45.)
- 83.1,325 = 110 cylindres-réservoirs, au lieu de 83 (575. p. 326).
- G = 12318.1,325 = 16321 kilogr., poids total des cylindres, au lieu de 12318 (577. p. 327).
- A = 1558.1,325 = 2064 kil., poids de l'air comprimé, au lieu de 1558 (578. p. 327).
- E = 5154 + 16321 + 2064 = 23539 kil., poids total de la machine de traction, au lieu de 19030 (579. p. 327).
- m = 101.1,325 = 134 force-de-chevaux pour les pompes à air, au lieu de 101 (582. p. 328).

Les 110 cylindres-réservoirs pourront être répartis sur la locomotive et sur deux wagons qui la suivent: 20 cylindres sur la machine, et 45 sur chacun des deux tenders. Le poids du train ne pourra être alors que de 62 000 kil., au lieu de 72 000 kil. (p. 327 *g*); mais cette diminution n'est pas importante, puisque le maximum du poids du train ne se présente pas ordinairement.

Le coût des cylindres-réservoirs, des machines à vapeur, servant les pompes à air, et des pompes à air elles mêmes, dont le montant total suivant (583. p. 328) est de 539 400 fr., s'éleve ici à 1,325 *fois* cette somme; mais le coût des machines de traction de 337 500 fr. (583. 2. p. 328) s'éleve dans un moindre rapport, et pourra être supposé à = 375 000 fr. Donc le montant total des frais d'établissement sera

(46.) 539 400.1,325 + 37 500 = 1 088 705 fr., au lieu de 876 900 fr. (583. p. 328).

Les frais de chauffage des machines à vapeur pour les pompes à air (584. p. 328) s'élevent dans le rapport de 1,325. Elles sont donc

(47.) 90 900.1,325 = 120 442 fr., au lieu de 90 900 fr. (584. p. 328).

Également les frais d'entretien des cylindres-réservoirs, des machines à vapeur et des pompes à air; auxquels il faut ajouter 6 p. c. du coût des

machines de traction. Le total de ces frais d'entretien sera donc

(48.) 41 977 fr. au lieu de 34 950 fr. (585. p. 329).

Cela donne la comparaison suivante des frais d'établissement et d'entretien des machines etc., nécessaires pour le service de l'air comprimé, avec celles de l'appareil pour le service de la vapeur. Cette comparaison prend la place de celle (§. 73.). (Ce paragraphe est un de ceux qui, comme il est dit au bas de la page 331, ont été supprimés dans ce journal, parcequ'ils ne contiennent que des objets purement techniques; mais les paragraphes supprimés se trouvent pages 162—169 des exemplaires du mémoire tirés et mis en vente à part.)

Les *frais d'établissement* pour le service de l'air comprimé sont suivant (46.) . . . . 1 088 705 fr.

Celles pour le service de la vapeur sont suivant (§. 73. *A.*) 1 162 500 -

Donc le service de l'air comprimé coûte *moins* en frais d'établissement . . . . 73 795 fr.,

au lieu des 285 600 fr. du mémoire (609.).

Les *dépenses annuelles* pour le service de l'air comprimé sont les suivantes.

Le chauffage des machines à vapeur pour les pompes à air sont suivant (47.) . . . . 120 442 fr.

Les frais d'entretien des cylindres-réservoirs, des machines à vapeur et des pompes à air sont suivant (48.) . . . . 41 977 -

162 419 fr.

A déduire une économie sur les frais d'entretien de la voie, à raison de 6 p. c., ... 11 250 -

Reste . . . . 151 169 fr.

Les frais de chauffage des locomotives à vapeur seront par an (§. 73. *B.*) . . . . 90 000 fr.

Les frais de leur entretien . . . . 78 750 -

Total . . . . . 168 750 -

Donc le servcie de l'air comprimé coûte en moins . . 17 581 fr.,

au lieu des 54 150 fr. du mémoire (610.).

On voit par là qu'effectivement l'économie en frais d'établissement et d'entretien qu'offre le service de l'air comprimé sur celle de la vapeur, serait

moindre, si la force des locomotives à air avec détente devait être calculée suivant l'équation (4.), et non pas selon le principe de ***Mariotte*** seul: mais l'économie, même dans ce cas, n'est pas ***nulle,*** elle subsiste toujours; comme on pouvoit presque le prévoir, même sans calcul, parcequ'il a été prouvé (§. 74. ***B.***) que si l'on voulait renoncer entièrement à la ***détente*** et ne se servir que de locomotives à air ***sans détente,*** cas dans lequel la formule (4.) n'a aucune influence sur les calculs et les résultats du mémoire de l'éditeur, ce service ne coûterait que peu de chose d'avantage que celui des locomotives à vapeur, de sorte que, sans doute et en tout cas, on arrivera encore à quelque économie par la ***détente.***

11. Or, comme tous les autres avantages, énumérés §. 81. et 82. p. 336 etc., propres au service de l'air comprimé sur celui de toute autre force motrice pour les chemins de fer, restent sans le moindre changement, la formule (4.) n'ayant aucune influence sur elles: ce qui a été dit (§. 82. page 339), savoir que le système à locomotives à air et sans tube de propulsion est supérieur et préférable à tout autre système, reste intact et n'est pas ébranlé par les conséquences de la formule (4.), si même cette formule devait être bien fondée. Donc le résultat final du mémoire de l'éditeur subsiste toujours; et c'est le point principal pour la bonne cause.

---

12. Nous nous permettrons maintenant quelques remarques sur la formule (4.), seul motif et source de cette discussion.

On ne trouve pas cette formule dans les écrits les plus distingués publiés jusqu'en 1845, où l'éditeur composa son mémoire, par ex. dans ceux de ***Biot, Peclet, Pouillet, Dulong, Lamé*** etc. Elle ne se trouve que dans les écrits plus récents, par ex. dans les suppléments au traité de physique de ***Baumgärtner*** et dans un mémoire de Mr. ***Clausius,*** imprimé dans les comptes rendus de l'académie de Berlin pour 1850. Mais la formule, en tant que sache l'éditeur, n'est pas fondée sur les résultats d'expériences suffisamment étendues et immédiatement relatives au sujet dont il s'agit: on y arrive indirectement avec des détours, par des conclusions, qui ne sont pas sans hypothèses, et en combinant la théorie avec celle de ***Newton*** sur les ondulations des fluides élastiques, et en partant d'expériences sur la vitesse du son qui de leur côté reposent sur l'évaluation des hauteurs des tous produits par le son. A la verité, on pourrait aussi déduire la formule du chap. 3 livre 12 tome 5 de la

Mécanique céleste de *Laplace*, mais les expériences de *Desormes, Clement, Welter* et *Gay Lussac* qui fournissent les valeurs *numériques* à la théorie de *Laplace,* sont peu étendues; l'air n'a été comprimé et dilaté que très peu dans ces expériences. La formule (4.) n'est donc pas appuyée par des expériences directes et suffisamment étendues; elle ne l'est plutôt que par des conclusions et par des hypothèses; et par conséquent elle n'est nullement fondée. Aussi les physiciens ne paraissent ils pas être complètement *d'accord* sur ce sujet. Par ex. Mr. *Lamé* dit page 88 tome 2 de son Cours de physique, Paris 1836: „Ainsi, par une compression de $\frac{1}{267}$ de son volume, l'air doit s'échauffer de 0°,421 etc." Cet énoncé, mis en formule, donne une expression *différente* de celle (4.). De plus la formule (4.) est déjà en elle même douteuse par le résultat qu'elle donne. Par ex. suivant cette formule la température de 0 dégres doit descendre en dilatant l'air à un quart de la densité, jusqu'à un froid de 120,7 degr. cent. et monter en comprimant l'air à une densité quadruple, jusqu'à une chaleur de 216,4 degr. cent. Si ce dernier effet avait lieu, le cylindre en métal d'une pompe à air foulante, deviendrait incandescent par les coups accélérés et repétés du piston, ce qui n'est pas. Il est bien connu que par une compression forte et subite on peut embraser un morceau d'amadou, mais ce briquet ne prouve pas encore qu'effectivement une très grande chaleur peut être produite par la compression de l'air, surtout quand elle n'est pas effectuée tout a fait instantanément; car l'embrasement de l'amadou ne réussit pas sans l'emploi de moyens qui le favorisent. Également donc aussi un très grand refroidissement de l'air par sa dilatation est douteux, surtout si la dilatation n'est pas effectuée momentanément, mais plutôt successivement, comme dans les locomotives à air. En tant que sache l'éditeur, des expériences *directes* et suffisamment étendues, pour constater sans hypothèses et immédiatement, l'influence de la dilatation de l'air sur sa *tension,* produite par le refroidissement, manquent encore absolument. On attend les résultats des expériences sur le refroidissement de l'air par la dilatation que Mr. *Regnault* prépare; ils décideront si la formule (4.) est bonne, ou si et comment elle doit être modifiée.

Pour notre sujet, savoir pour l'utilisation de la force expansive de l'air comprimé comme force motrice sur les chemins de fer, au moyen de locomotives à air *avec détente*, ce n'est pas proprement le *refroidissement* de l'air, produit par la dilatation subite, qui nous intéresse, mais plutôt la diminution de la *tension* de l'air au delà de ce qu'elle doit être suivant la loi de

Mariotte. Pour trouver cette dimunition par la voie la plus sure, le meilleur moyen serait evidemment d'expérimenter immédiatement avec un cylindre de locomotive à air, non pas en miniature, mais de grandeur ordinaire; de mesurer avec un dynamomètre la force effective du piston et de la comparer avec celle qui aurait lieu si la loi de *Mariotte* n'était pas changée par le refroidissement de l'air. Mais si l'on veut éviter ces expériments un peu coûteux, il parait qu'on pourrait aussi arriver au même bût par des expériences suivantes, bien moins coûteuses.

13. On mettra en communication par un tube en métal et courbé, un vase tout clos d'un volume de 30 à 60 décimètres cubes, que nous désignerons par B, avec un manomètre composé d'un tube en verre descendant verticalement de 12 décimètres environs, et d'un autre tube en verre, remontant verticalement de 16 décim., les deux tubes mis en communications entre eux à leurs bas par un tube courbé en métal, tous les tubes droits et courbés precisément du *même* calibre et de celui des tubes de baromètre ordinaire. Le tube descendant sera désigné par R_1, le tube ascendant par R_2. Dans la partie courbée qui joint en bas les deux tubes descendant et ascendant, sera un robinet H_1, du même calibre que les tubes. Un autre robinet H_2, d'un plus gros calibre, se trouvera au vase B. Les deux robinets H_1 et H_2 seront mis en communication, par ex. au moyen d'une crémaillère, qui s'engrènera dans deux petites roues dentelées, fixées aux deux robinets, de sorte qu'au moyen de cet appareil les deux robinets peuvent être ouverts et fermés absolument dans le *même moment*, bien que le robinet H_1 en bas, puisse aussi être tourné indépendamment de l'autre. Les tubes du manomètre seront emplis de mercure, en tant que sa surface, quand il est en niveau dans les deux tubes, se tient de 4 décim. environ au dessous de la courbure supérieure du manomètre dans le tube descendant, et par conséquent de 8 décim. au dessus du robinet H_1 en bas, et de 8 décim. au dessous de l'embouchure du tube ascendant qui est ouvert en haut. Le point où le mercure dans les deux tubes est au niveau, sera le point *zéro* du manomètre. Cela posé, après avoir ouvert le robinet H_1, et fermé le robinet H_2, on comprimera successivement par une pompe à air, l'air atmosphérique contenu dans le vase B jusqu'à une tension de 3 atmosphères. Par l'effet de cette compression, si dans le moment de l'expérience le baromètre se tient par ex. à la hauteur de 76 centim. au dessus de zéro, le mercure dans le tube decendant R_1 du manomètre sera refoulé de 76 centim. vers le bas, et dans le tube ascendant R_1 il montera

de 76 centim. au dessus du point zéro. L'équilibre étant parfaitement rétabli après cette opération, on ouvrera le robinet H_2 du vase B et en laissera sortir l'air comprimé; mais on n'attendra pas l'épuisement du vase et le rétablissement de l'équlibre de l'air qu'il contient, avec l'air extérieur; au contraire en refermera déjà le robinet H_2, tout au plus après un laps *de temps d'une seconde*. Comme l'air comprimé sortira du vase B avec une vitesse et vehemence extrèmes, sa tension diminuera déjà considérablement, même dans le petit espace de temps, peut-être de 3 jusqu'à $1\frac{1}{2}$ atm. En réfermant le robinet H_2, l'autre robinet H_1, au bas du manomètre, qui était ouvert, doit aussi être fermé dans le même moment au moyen de la crémaillère; mais immédiatement après on réouvrera le robinet H_1 seul, celui H_2 restant fermé. Par l'effet de l'écoulement de l'air du vase B, et de la dimunition de sa tension, produite par là, le mercure sera monté dans le tube descendant et tombé dans le tube ascendant du manomètre, pour rétablir son équilibre avec la pression diminuée de l'air. Si, comme on là supposé, la tension de l'air dans le vase B a été réduite par l'écoulement de 3 jusqu'à celle de $1\frac{1}{2}$ atm., le mercure dans le tube descendant du manomètre devra être monté de 76 jusqu'à 19 centim. au dessous de zéro, et tombé dans le tube ascendant de 76 jusqu'à 19 centim. au dessus de zéro, car la différence de niveau de $2.19 = 38$ centim. est celle qui tient équilibre au surplus de la *demi-atmosphère* qui est restée à l'air dans B sur l'air extérieur. Mais tout cela n'arriveroit que sous la condition que la loi de *Mariotte* seule ait lieu. Or indubitablement un *refroidissement* a été produit par la dilatation subite de l'air, et par là une diminution de la tension de l'air *au delà* de celle que veut la loi de *Mariotte*. Donc le mercure dans le tube descendant R_1 du manomètre sera monté *plus haut* que 19 centim. au dessous de zéro, et celui dans le tube ascendant R_2 sera tombé *plus bas*, et ce *surplus* donnera immédiatement la mesure de l'effet que le refroidissement de l'air par la dilatation subite a sur sa tension. Du surplus de diminution de la tension de l'air, qu'on trouve de cette manière, on pourra, si on le veut, *calculer* réciproquement le degré du *refroidissement* selon la loi de *Gay-Lussac*. Comme le robinet H_1 en bas, a été réouvert momentanément après la fin de l'écoulement de l'air du vase B, le mercure dans le tube descendant R_1 rétombera, et celui dans le tube R_2 rémontera peu à peu et à mesure que l'air dans le vase B reprend la température extérieure; cela se continuera jusqu'aux points auxqu'elles il faut que le mercure reste stationnaire d'après la loi de *Mariotte*, et la différence de

ces élévations est alors la mesure de la tension *permanente* qui est restée à l'air comprimé dans le vase B. Le robinet H_1, au bas du manomètre, n'a d'autre but que d'empêcher les *oscillations* du mercure dans les deux tubes du manomètre; ou au moins de les amoindrir autant que possible. Car en vertu du mouvement que le mercure a acquis en tombant et en montant dans les deux tubes, par suite de l'écoulement de l'air du vase B, celui du tube descendant monteroit *encore* plus haut, et celui du tube ascendant tomberoit *encore* plus bas qu'il ne faut pour faire équilibre à l'air dilaté et *refroidi*, si la masse du mercure étoit parfaitement libre. Mais comme le robinet H_1 a été fermé immédiatement après la fin de l'écoulement de l'air du vase B, le mercure descendant dans le tube R_2 se *heurte* contre le robinet H_1 et ne peut pas continuer son mouvement. Seulement le mercure dans le tube ascendant le peut encore, mais la continuation de son ascension ne peut être que très insignifiante, parceque non seulement le *poids* du mercure, mais en outre la forte *pression de* $1\frac{1}{2}$ *atm.* de l'air s'y oppose, et elle ne peut durer que pendant un temps tout à fait imperceptible. Donc, après qu'on a eu réouvert le robinet H_1, les oscillations qui peuvent avoir lieu, ne pourront être que très insignifiantes. On voit que de cette manière, à l'aide du robinet H_1, l'effet que le refroidissement de l'air par la dilatation subite a sur sa tension, pourra être mesuré immédiatement et avec beaucoup de sureté et d'exactitude. Aussi voit-on que par un procédé tout analogue le surplus de *l'augmentation* de la tension de l'air que l'échauffement produit, en comprimant l'air, pourra être mesuré, si par ex. d'un second vase, empli d'air comprimé, on laisse s'écouler cet air dans le vase B, dans lequel l'air n'est pas comprimé, et plutôt dilaté. De même, le surplus de *diminution* de la tension de l'air que le refroidissement produit en dilatant l'air, pourra être mesuré si du vase B, contenant de l'air atmosphérique, on laisse s'écouler cet air dans un autre vase contenant de l'air dilaté.

14. Mais quels que soient les résultats de ces expériences, ou d'autres, et même si toutes les expériences devaient confirmer purement la formule (4.), il y a encore deux circonstances à prendre en considération dans le calcul de l'effet de l'air comprimé comme force motrice sur les chemins de fers. Toutes les deux *s'opposent* à la diminution de la tension de l'air, produite par son refroidissement, quand il est dilaté dans les cylindres de la locomotive à détente; et tout aussi bien qu'il faut avoir égard à l'effet du refroidissement de l'air dilaté, il faut aussi avoir égard à ces deux circonstances.

La *première* est le *rétablissement* de la température de l'air refroidi par la dilatation, qui lui vient du dehors par les parois du cylindre. Quel *temps* ce rétablissement demande-t-il? Cette question ne parait pas encore avoir été résolue; mais il est bien possible, et même vraisemblable que ce temps est très court, parceque le calorique ne peut pas être chassé, ni anéanti par la dilatation, mais seulement devenu latent; et qu'il reprendra bien vite sa fonction.

La *seconde* circonstance est le *frottement* du piston contre les parois du cylindre. Ce frottement est très fort, si le piston, comme il doit l'être, est tout en métal, et il produit un échauffement considérable qui s'oppose au refroidissement de l'air par la dilatation.

Tout cela reste encore à examiner et à *mesurer*, et c'était dans ces vues que l'éditeur a dit (page 16) de son mémoire, que selon son opinion l'abaissement de la température de l'air n'aura pas un effet considérable sur sa tension. Il insiste sur cette opinion, et par conséquent aussi sur les résultas de ses calculs, jusqu'à ce qu'il sera *demontré* que ces résultats doivent être modifiés, et dans quelle proportion; ce qui n'a pas encore été fait.

15. Du reste il est à désirer que par les objections de l'auteur, on ne se laisse peut-être pas déterminer à abandonner tout à fait l'idée de l'utilisation de la tension de l'air comprimé comme force motrice sur les chemins de fer; ce serait une perte énorme. Heureusement il n'existe pas un motif raisonnable pour cela, parceque, ainsi qu'il a été démontré plus haut, les préférences de l'air comprimé comme force motrice, lui restent encore, même dans le cas où la formule (4.) et les résultats qu'elle donne, devraient être justifiés par l'expérience, ce qui d'ailleurs par soi-même est *impossible*, parceque en tout cas (suivant §. 14) il reste encore à prendre en considération les effets du rétablissement de la température de l'air par les parois du cylindre et du frottement du piston contre ces parois.

16. L'auteur des objections contre les calculs de l'éditeur mérite d'ailleurs la reconnaissance, surtout des physiciens, parceque ces objections contribuerons peut-être à exciter de nouvelles tentatives pour approfondir une question très intéressante de physique, et qui jusqu'ici n'a pas encore été résolue parfaitement.

Berlin, Mai 1850.

18.

Über die Aufhebung der Ungleichmäfsigkeit der durch die Kurbel vermittelten Bewegung.

(Von Herrn Amtmann *Prehn* zu Ratzeburg.)

Wenn die gleichförmig rotirende Bewegung einer Axe und die (alternirende) geradlinige Bewegung einer Stange mittels der Kurbel mit einander in Verbindung gesetzt sind, so hebt die Geschwindigkeit der Stange mit 0 an, wächst bis zu einem Maximum, und nimmt dann wieder bis auf 0 ab. Die Bewegung ist aber ungleichmäfsig, dergestalt, dafs das Maximum nicht in der Mitte liegt, vielmehr die Stange in der einen Hälfte der auf den ganzen Weg verwendeten Zeit mehr als die Hälfte des Weges und in der andern Hälfte der Zeit weniger als die Hälfte des Weges zurücklegt.

Diese Ungleichmäfsigkeit, welche bei manchen Maschinen Unzuträglichkeiten hat, wird vermindert, je mehr die Leitstange der Kurbel verlängert wird; sie würde ganz verschwinden, wenn die Leitstange unendlich lang werden könnte.

Es werde nun die Aufgabe gestellt: eine Kurbel, für eine beliebige endliche Länge der Leitstange, so zu construiren, dafs sie eine vollkommen gleichmäfsige geradlinige Bewegung vermittelt; gleich derjenigen, welche bei Anwendung einer unendlich langen Leitstange entstehen würde.

Die Betrachtung des analytischen Ausdrucks für die Kurbelbewegung hat mich zu einer einfachen Lösung dieses Problems geführt.

Ist in (Taf. III. Fig. 1.) $ce = r$ der Halbmesser der Kurbel, $ef = l$ die Länge der Leitstange und $a'b' = 2r$ der ganze Weg, den die Stange fn bei einer halben Umdrehung der Axe zurückzulegen hat; ist ferner $a'f = u$ der einer Axendrehung $bce = \varphi$ correspondirende Weg der Stange, so findet man

$$u = r(1-\cos\varphi) + \sqrt{(l^2 - r^2 \sin\varphi^2)} - l.$$

Für den Fall, dafs $l = \infty$ oder die Leitstange unendlich lang wäre, hätte man: $u = r(1-\cos\varphi)$.

Der Weg $a'g'$, der einer Axendrehung $= \pi - \varphi$ correspondirt, ist $= r(1+\cos\varphi) + \sqrt{(l^2 - r^2 \sin\varphi^2)} - l$, und bezeichnet man mit u' den Weg

$b'g' = 2r - a'g'$, den die Stange beim Rückwärtsgehen während einer Axendrehung $= \varphi$ zurücklegen würde, so hat man

$$u' = r(1-\cos\varphi) - \sqrt{(l^2 - r^2\sin\varphi^2)} + l.$$

Giebt man der Kurbel eine zweite Leitstange eg, von der gleichen Länge $= l$, aber entgegengesetzter Lage, so ist es offenbar, dafs bei einer Axendrehung $= \varphi$ der Punct g der zweiten Leitstange, in der Richtung der durch das Centrum der Kurbel gehenden Senkrechten, den Weg $ag = b'g' = u'$ zurücklegen wird, während der Punct f der ersten Leitstange den Weg $a'f = u$ zurücklegt. Nun ergeben aber die Gleichungen, dafs

$$\tfrac{1}{2}(u+u') = r(1-\cos\varphi),$$

d. h. das arithmetische Mittel der Wege von f und von g ist, gleich dem Wege, den die Stange bei der erzielten gleichmäfsigen Bewegung zurücklegen soll.

Könnte man daher die Puncte f und g der beiden Leitstangen so verbinden, dafs beide ihre eigenthümliche Bewegung behielten, und könnte man bei dieser Verbindung den Angriffspunct der Stange so anbringen, dafs der Weg der Stange dem arithmetischen Mittel der von den Puncten f und g zurückgelegten Wege gleich sein müfste, so würde die Aufgabe gelöset sein.

Beide Bedingungen werden aber ersichtlich durch ein verschiebbares Quadrat erfüllt, dessen oberste und unterste Winkelspitzen resp. mit den Puncten f und g verbunden werden, während der Mittelpunct desselben zum Angriffspunct der Stange genommen wird. Die Verschiebbarkeit des Quadrats in ein gleichseitiges Parallelogramm gestattet nemlich die gleichzeitige Bewegung der beiden Leitstangen, und der Weg, den der Mittelpunct zurücklegt, ist nothwendig das arithmetische Mittel der Wege der beiden Winkelspitzen.

Die Fig. 2. zeigt die Anordnung für den Fall, dafs die Kurbel frei aufserhalb des Stützpuncts der Axe liegt: für den Fall, dafs die Kurbel in einem Knie der Axe gehen soll, mufs das Gestänge gebrochen sein; so dafs es die Axe zwischen sich fassen kann.

Es ist der Punct f der obern Leitstange mittels des Verbindungsstücks fd' mit der obern Winkelspitze d' und der Punct g der untern Leitstange mittels des Verbindungsstücks gd mit der untern Winkelspitze d des Quadrats in Verbindung gesetzt; wobei es sich von selbst versteht, dafs die Verbindungsstücke fd' und gd durch Frictionsrollen, oder auf andre Weise, in lothrechter Stellung erhalten werden müssen. In dem Mittelpunct α des Quadrats ist der Angriffspunct der Stange αn, welche alsdann die geforderte gleichmäfsige Bewegung erhält.

Um die Gröfse des Quadrats zu bestimmen, dient folgende Betrachtung.

Die Entfernung der Puncte f und g, welche bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ihren gröfsten Werth $= 2l$ hat, ist am kleinsten bei $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und hat da den Werth $= 2\sqrt{(l^2 - r^2)}$; das Quadrat mufs daher um die Länge $= 2(l - \sqrt{(l^2 - r^2)})$ sich strecken können. Ist nun ϑ der kleinste Winkel, den die Seiten des Quadrats bei der stärksten Verschiebung mit einander bilden und a die Länge der Seite, so ist die gröfste Streckung des Quadrats $= 2a(\cos\frac{1}{2}\vartheta - \sin\frac{1}{2}\vartheta)$ und man hat mithin zur Bestimmung der Seite a die Gleichung

$$a = \frac{l - \sqrt{(l^2 - r^2)}}{\cos\frac{1}{2}\vartheta - \sin\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Der Werth von ϑ ist von technischen Rücksichten abhängig; in der Zeichnung Fig. 2. ist $\vartheta = 60^\circ$ vorausgesetzt und es ist mithin, da $l = 2{,}3 . r$ ist, $a = \frac{1}{2}r$; nimmt man den Werth $\vartheta = 45^\circ$ als zuläfslich an, so erhält man für die Seite des Quadrats $a = 0{,}444 . r$.

Berlin, den 23. März 1850.

19.

Über das gröfste Product der Theile oder Summanden jeder Zahl.

(Von dem Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Wird eine gegebene Zahl a in zwei beliebige Theile zerlegt, so ist bekanntlich das Product der Theile am gröfsten, wenn dieselben gleich sind. Eben so verhält es sich, wenn die Zahl a in 3, 4, 5, ... n Theile zerlegt wird. Da aber die hiebei entstehenden gröfsten Producte unter sich verschieden sind, so entsteht die Frage: „*in wieviele gleiche Theile, oder in was für Theile die Zahl a zerlegt werden müsse, damit das Product derselben am allergröfsten, ein Maximum Maximorum, werde?*"

Man findet leicht, dafs jeder Theil $= e$, d. h. gleich der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und somit die Anzahl der Theile $= \frac{a}{e}$ sein mufs, so dafs also das verlangte gröfste Product

$$= e^{\frac{a}{e}}$$

ist. Oder da $\sqrt[e]{e} = 1,4446....$, so ist das gröfste Product der Summanden jeder Zahl a

$$= (1,4446...)^a.$$

Wenn also $xe = yz = a$, so ist immer

$$e^x > z^y.$$

Für $a = 1$, wird $x = \frac{1}{e}$, und da man dabei auch $y = \frac{1}{z}$ annehmen kann, so hat man

$$\sqrt[e]{e} > \sqrt[z]{z}, \quad \text{oder} \quad e^z > z^e,$$

d. h. „*Wird jede Zahl durch sich selbst radicirt, so gewährt die Zahl e die allergröfste Wurzel;*" oder: „*Die Zahl e hat die Eigenschaft, dafs sie, mit jeder andern Zahl z gegenseitig potenzirt, allemal die gröfsere Potenz giebt.*"

Verlangt man zwei Zahlen b und c, für welche

$$\sqrt[b]{b} = \sqrt[c]{c}, \quad \text{oder} \quad b^c = c^b$$

sein soll, so ist die eine, etwa b, kleiner und die andere c gröfser als e; nämlich b hat den Spielraum von e bis 1, während c von e bis ∞ wächst. Es giebt nur einen Fall, wo b und c ganze Zahlen sind, nämlich 2 und 4. Wenn $d > c > e$, so ist immer

$$\sqrt[c]{c} > \sqrt[d]{d}, \quad \text{oder} \quad c^d > d^c.$$

Berlin, im März 1850.

20.

Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen.

(Von Herrn Prof. G. *Lejeune Dirichlet* zu Berlin.)

(Vorgetragen in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe der Akademie am 31ten Juli 1848 *)).

Bekanntlich hat *Lagrange* zuerst gezeigt, dafs jede binäre quadratische Form reducirt, d. h. in eine andere äquivalente verwandelt werden kann, deren Coëfficienten gewisse Ungleichheitsbedingungen erfüllen, und zugleich nachgewiesen, dafs in jeder Classe positiver Formen immer nur eine einzige solche Form existirt, so dafs für diesen Fall die verschiedenen, einer gegebenen Determinante entsprechenden reducirten Formen als die Repräsentanten der verschiedenen Classen dienen können. Nachdem später in den „Disquisitiones arithmeticae" die ternären Formen aus einem allgemeinen Gesichtspunct betrachtet worden waren, wurde es für die weitere Ausbildung dieser Theorie erforderlich, die von *Lagrange* für die positiven binären Formen ausgeführte Untersuchung auf die ternären derselben Art auszudehnen, d. h. solche Ungleichheitsbedingungen zwischen den Coëfficienten aufzufinden, dafs dieselben in jeder Classe von einer und nur von einer Form erfüllt werden. Diese mit grofsen Schwierigkeiten verbundene Erweiterung ist von *Seeber* in einem speciell den positiven ternären Formen gewidmeten Werke geleistet worden, dessen Hauptinhalt sie ausmacht und welches *Gaufs* in einer höchst interessanten Anzeige **) wie folgt characterisirt: „Dem Geiste der Gründlich-„keit, womit diese Gegenstände (die Auflösung der Aufgabe nämlich, in jeder „Classe eine reducirte Form zu finden, und der Beweis, dafs es in jeder nur „eine giebt) durchgeführt sind, müssen wir volle Gerechtigkeit widerfahren „lassen, und wenn wir es dabei bedauern müssen, dafs damit eine grofse und

---

*) Von dieser Abhandlung ist bereits ein Auszug im Monatsbericht der Akademie gegeben worden, worin das Princip dieser neuen Behandlung der Reduction der positiven ternären Formen, die Betrachtung successiver Minima, angedeutet und der Beweis des ersten der beiden *Seeber*'schen Resultate nach diesem Princip vollständig durchgeführt ist.

**) *Crelle's* Journal Band 20. pag. 312.

„vielleicht Manchen abschreckende Weitläuftigkeit verbunden gewesen ist, da die „Auflösung des Problems 41 Seiten und der Beweis des Theorems 91 Seiten „einnimmt, so wollen wir dies doch keineswegs als einen Tadel angesehen „wissen. Wenn ein schwieriges Problem oder Theorem aufzulösen oder zu „beweisen vorliegt, so ist allezeit der erste und mit gebührendem Danke zu „erkennende Schritt, dafs überhaupt eine Auflösung oder ein Beweis gefunden „werde, und die Frage, ob dies nicht auf eine leichtere und einfachere Art „hätte geschehen können, bleibt so lange eine müfsige, als die Möglichkeit nicht „zugleich durch die That entschieden wird. Wir halten es daher für unzeitig, „hier bei dieser Frage zu verweilen."

Die grofse Complication der *Seeber*'schen Methode hat mich schon vor längerer Zeit zu dem Versuche gereizt, die Theorie der reducirten ternären Formen auf eine einfachere Weise zu begründen. Indem ich jetzt der Classe das Resultat meiner dahin gerichteten Bemühungen mitzutheilen mir erlaube, glaube ich im Interesse der Kürze, und wenn ich so sagen darf, der Durchsichtigkeit der Darstellung, die geometrische Form beibehalten zu müssen, worin ich die Untersuchung geführt habe, der ich die merkwürdigen Beziehungen zu Grunde gelegt habe, welche zwischen den quadratischen Formen mit zwei oder drei Elementen und gewissen räumlichen Gebilden Statt finden. Ich beginne mit der Ausführung der schon von *Gaufs* in der erwähnten Anzeige über diese Beziehungen gegebenen Andeutungen.

§. 1.

Die ternäre Form

$$(1.)\quad ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'yz = \varphi,$$

in welcher wir x, y, z als erstes, zweites, drittes Element betrachten, heifst positiv, wenn φ für reelle Werthe dieser Elemente nie negativ wird; in einer solchen Form sind die Coëfficienten

$$a,\ b,\ c$$

immer positiv, während die Coëfficientenverbindungen

$$(2.)\quad a'^2-bc,\ b'^2-ac,\ c'^2-ab,\ aa'^2+bb'^2+cc'^2-abc-2a'b'c' = -D,$$

deren letzte $-D$ die Determinante der Form heifst, negativ sind *). Vermöge dieser Bedingungen giebt es immer drei durch die Gleichungen

$$\cos\lambda = \frac{a'}{\sqrt{bc}},\quad \cos\mu = \frac{b'}{\sqrt{ac}},\quad \cos\nu = \frac{c'}{\sqrt{ab}}$$

*) Disquisit. arith. art. 271.

völlig bestimmte spitze oder stumpfe Winkel, aus denen eine dreikantige Ecke gebildet werden kann, da die hierzu erforderliche Bedingung

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu < 1$$

mit $D > 0$ zusammenfällt. Da jedoch mit denselben Winkeln λ, μ, ν zwei zu einander symmetrische Ecken gebildet werden können, so wollen wir übereinkommen, immer die von diesen beiden Ecken zu wählen, bei welcher die Kanten, wie sie diesen Winkeln der Reihe nach gegenüber liegen, in Bezug auf eine vom Scheitel 0 nach dem Innern der Ecke gerichtete und als nach oben gehend gedachte Gerade einander von der Rechten zur Linken folgen. Betrachten wir nun die drei Kanten als die positiven Axen eines Coordinatensystems, so können wir den ganzen unendlichen Raum auf unsere Form beziehen, indem wir die Producte $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$ als die Coordinaten eines beliebigen Punctes desselben ansehen, und φ drückt dann das Quadrat der Entfernung dieses Punctes vom Scheitel aus, oder noch allgemeiner das Quadrat der Entfernung zweier Puncte, deren gleichnamige Coordinaten jene Producte zu Differenzen haben. Bildet man jetzt mit drei neuen unbestimmten Elementen x', y', z' die linearen Ausdrücke

$$(3.)\quad x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \quad y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \quad z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',$$

wobei nur die eine Beschränkung Statt finden soll, dafs die aus den 9 Coëfficienten α, β, ... gebildete Determinante

$$(4.)\quad \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' = E$$

nicht Null ist, so geht φ in eine neue Form φ' über, in Bezug auf welche alles Entsprechende mit den accentuirten Buchstaben bezeichnet werden soll. Läfst man der neuen Form wieder einen unendlichen Raum entsprechen, so sind dadurch zwei unendliche Räume Punct für Punct auf einander bezogen, indem je zwei Puncte einander entsprechen, wenn in den Ausdrücken ihrer Coordinaten

$$x\sqrt{a},\quad y\sqrt{b},\quad z\sqrt{c};\quad x'\sqrt{a'},\quad y'\sqrt{b'},\quad z'\sqrt{c'}$$

die Elemente x, y, z; x', y', z' durch die Gleichungen (3.) mit einander verbunden sind. Sind die eben geschriebenen Ausdrücke die Coordinatendifferenzen für zwei Paare correspondirender Puncte, so finden offenbar noch dieselben Beziehungen zwischen x, y, ... Statt, woraus nach Obigem und wegen $\varphi = \varphi'$ sogleich folgt, dafs die Entfernung je zweier Puncte des einen Raumes der Entfernung der entsprechenden des andern gleich ist.

Die beiden punctweise auf einander bezogenen Räume sind also entweder congruent oder symmetrisch, d. h. sie lassen sich, indem die Anfangspuncte 0 und 0' auf einander gelegt werden, in eine solche Lage bringen, dafs entweder jeder Punct auf seinen entsprechenden oder auf den Gegenpunct des letzteren fällt, wenn wir zur Abkürzung zwei Puncte desselben Raumes, die vom Anfangspuncte aus in gleicher Entfernung und entgegengesetzter Richtung liegen, Gegenpuncte nennen. Um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Fällen Statt findet, hat man in dem einen Raume vom Scheitel aus nach drei beliebigen Puncten Linien zu ziehen und dann zu untersuchen, ob die im andern von seinem Scheitel aus nach den entsprechenden Puncten gezogenen Geraden eine übereinstimmende oder die entgegengesetzte Aufeinanderfolge darbieten. Nimmt man z. B. im zweiten Raume die nach den Puncten mit den Coordinaten

$$\sqrt{a'},\ 0,\ 0; \quad 0,\ \sqrt{b'},\ 0; \quad 0,\ 0,\ \sqrt{c'}$$

gezogenen Linien, so folgen diese, welche auf die positiven Axen des zweiten Raumes fallen, nach der oben getroffenen Übereinkunft einander von der Rechten zur Linken. Für die entsprechenden Puncte im ersten Raume hat man die Coordinaten

$$\alpha\sqrt{a'},\ \alpha'\sqrt{a'},\ \alpha''\sqrt{a'}; \quad \beta\sqrt{b'},\ \beta'\sqrt{b'},\ \beta''\sqrt{b'}; \quad \gamma\sqrt{c'},\ \gamma'\sqrt{c'},\ \gamma''\sqrt{c'}.$$

Um auszumitteln, ob die nach diesen Puncten gerichteten Linien einander von der Rechten zur Linken, d. h. wie die Axen des ersten Raumes oder in umgekehrter Ordnung folgen, kann man sich des bekannten oder wenigstens aus bekannten Eigenschaften leicht ableitbaren Satzes *) bedienen, nach welchem die nach den drei Puncten mit den Coordinaten

$$\xi,\ \eta,\ \zeta; \quad \xi',\ \eta',\ \zeta'; \quad \xi'',\ \eta'',\ \zeta''$$

gezogenen Geraden dieselbe Aufeinanderfolge wie die Axen der ξ, η, ζ oder die entgegengesetzten darbieten, je nachdem die aus den 9 Coordinaten gebildete Determinante, wenn man darin dem Gliede $\xi\eta'\zeta''$ das positive Zeichen giebt, positiv oder negativ ist. Für unsern Fall wird diese Determinante $E\sqrt{(a'b'c')}$; es findet also Congruenz oder Symmetrie Statt, je nachdem E positiv oder negativ ist.

Bisher hatten die Elemente x, y, z beliebige Werthe. Läfst man sie jetzt nur noch ganze Zahlen bedeuten, so haben wir statt des ganzen Raumes

---

*) Disq. gen. cir. superf. cur. auct. *C. F. Gaufs.* §. 1. VII.

ein unendliches System parallelepipedisch geordneter Puncte, d. h. ein Punctensystem, welches durch die Durchschnitte dreier Reihen paralleler äquidistanter Ebenen gebildet wird. Nehmen wir nun noch an, dafs auch die Substitutionscoëfficienten $\alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen sind und E den Werth ± 1 hat, so wird jeder ganzzahligen Verbindung x, y, z eine ganzzahlige Verbindung x', y', z' und umgekehrt entsprechen. Die solcher Weise auf einander bezogenen parallelepipedischen Systeme können nach Obigem in solche Lage gebracht werden, dafs das eine entweder mit dem andern oder mit den Gegenpuncten des letzteren zusammenfällt. Beide Fälle sind jedoch nicht von einander verschieden, da die Gegenpuncte der Puncte eines solchen Systems wieder dasselbe System bilden, und dasselbe erhellt auch aus dem Umstande, dafs φ' ungeändert bleibt, wenn man $\alpha, \beta, \ldots$ mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, wodurch E in $-E$ übergeht. Die beiden Systeme sind also immer congruent und man sieht, dafs die, zwei äquivalenten ternären Formen φ und φ' entsprechenden Systeme dasselbe räumliche Gebilde in zwei verschiedenen Anordnungen sind. Umgekehrt entsprechen irgend zwei verschiedenen parallelepipedischen Anordnungen desselben Systems äquivalente Formen. Nimmt man nämlich irgend einen Punct des Systems zum gemeinschaftlichen Anfangspunct, so hat man zwischen den, auf die beiden Axensysteme bezüglichen Coordinaten und also auch zwischen den ihnen proportionalen Elementen x, y, z, x', y', z', lineare Gleichungen ohne constantes Glied, d. h. Gleichungen von der Form (3.), und da nach unserer Voraussetzung, wenn x, y, z ganze Zahlen sind, auch x', y', z' dieselbe Eigenschaft haben müssen und umgekehrt, so folgt, dafs $\alpha, \beta, \ldots$ ebenfalls ganze Zahlen sind und dafs $E = \pm 1$ ist. Andrerseits hat man für zusammengehörige ganze Werthe der Elemente, $\varphi = \varphi'$, welche Gleichung daher auch identisch Statt findet, w. z. b. w.

Ähnliche Beziehungen finden zwischen einer positiven binären Form

$$lx^2 + 2mxy + ny^2$$

und einem System parallelogrammatisch geordneter Puncte Statt. Nimmt man hier zwei unter dem durch die Gleichung $\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{ln}}$ bestimmten Winkel θ gegen einander geneigte Axen, indem man bei der Unterscheidung dieser Axen immer gleichförmig verfährt und z. B. die zweite links von der ersten wählt, nachdem eine bestimmte Seite der Ebene als die obere bezeichnet worden, und betrachtet $x\sqrt{l}$, $y\sqrt{n}$ als Coordinaten, so erhält man ein durch die quadratische Form völlig bestimmtes System von Puncten, die als die Durch-

schnitte von zwei Reihen äquidistanter Parallellinien betrachtet werden können. Findet dann zwischen zwei Formen die sogenannte eigentliche Äquivalenz Statt, so dafs $\alpha\delta - \beta\gamma$ in den Substitutionsgleichungen $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ der positiven Einheit gleich ist, so lassen sich die entsprechenden Systeme durch Bewegung in der Ebene zum Coïncidiren bringen, während im andern Falle wo $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, allgemein zu reden, eins der Systeme zu diesem Zweck umgelegt werden mufs.

§. 2.

Nachdem wir im Vorhergehenden den Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen und gewissen geometrischen Gebilden festgestellt haben, sind einige weitere Eigenschaften dieser Gebilde zu entwickeln, wobei wir zur Abkürzung ein System parallelogrammatisch oder parallelepipedisch geordneter Puncte ein System zweiter oder dritter Ordnung, und eine unendliche Reihe äquidistanter Puncte in gerader Linie ein System erster Ordnung nennen werden.

Der gemeinsame Character aller drei Gattungen von Systemen besteht offenbar darin, dafs, wenn ein solches System durch eine Bewegung ohne Drehung, die wir eine Verschiebung nennen wollen, so in eine andere Lage gebracht wird, dafs ein Punct desselben in die anfänglich von einem andern eingenommene Stelle übergeht, dasselbe für alle Puncte Statt findet, so dafs das System in seiner neuen Lage mit dem System in der ursprünglichen Lage vollständig coïncidirt. Es läfst sich leicht nachweisen, dafs die eben besprochene Verschiebbarkeit alle drei Gattungen von Systemen vollständig characterisirt, und dafs ein mit diesem Character begabtes System, wenn es in einer Geraden liegt und zwei Puncte enthält, wenn es in einer Ebene liegt und drei nicht einer Geraden liegende Puncte enthält, so wie endlich ein System, welches wenigstens vier nicht in einer Ebene befindliche Puncte enthält, respective ein System erster, zweiter oder dritter Ordnung sein wird.

Hat man z. B. ein System von Puncten, die sämmtlich in derselben Geraden liegen, und sind a und a' zwei benachbarte Puncte desselben, so wird durch eine Verschiebung, wodurch a nach a' gelangt, a' nach a'' gelangen, wo $a'a'' = aa'$; der von a' eben so weit entfernte Punct a'', als a' selbst von a entfernt ist, gehört daher ebenfalls zum System und dasselbe hat keinen Punct zwischen a' und a'', da ein solcher vor der Bewegung zwischen a und a' gewesen wäre. Da sich diese Betrachtung nach beiden Seiten ins Unbestimmte fortsetzen läfst, so ist die Behauptung bewiesen.

Es seien jetzt in einem ebenen Systeme mit dem Character der Verschiebbarkeit zwei benachbarte Puncte a und a', so dafs in der Linie aa' zwischen a und a' kein Punct des Systems sich befindet. Da durch die Verschiebung von a nach a', die unendliche Gerade aa' sich in sich selbst fortbewegt, so folgt, dafs sämmtliche Puncte des Systems in dieser Geraden, ein System erster Ordnung .. $''a'aaa'a''$ .. bilden. Da nun das System nach der Voraussetzung noch wenigstens einen Punct aufserhalb dieser Geraden hat, so sei b einer der dieser Geraden nächsten Puncte. Tritt jetzt eine Verschiebung ein, wodurch a nach b gelangt, so geht das System erster Ordnung in die neue Lage .. $''b'bbb'b''$ .. über und gehört in dieser dem ursprünglichen Systeme an, und zugleich ist klar, dafs weder zwischen den Puncten .. $''b$, $'b$, b, b', b'' .. noch zwischen den Geraden .. $'bbb'$ .., .. $'aaa'$ .. sich ein Punct des Systems befinden kann. Schliefst man so fort, so sieht man, dafs das gesammte System parallelogrammatisch angeordnet werden kann, und dafs man $aa'b'b$ zu einem Grundparallelogramm desselben wählen kann. Wir fügen noch hinzu, dafs durch die angegebene Construction offenbar alle parallelogrammatischen Anordnungen, deren das System fähig ist, erhalten werden können. Es folgt dies daraus, dafs die Wahl von a' bis auf die offenbar nothwendige Beschränkung, dafs zwischen a und a' kein Punct liege, beliebig ist, und dafs dann b in der nächsten Parallellinie beliebig angenommen werden kann.

Hat man endlich ein System mit dem Character der Verschiebbarkeit, welches wenigstens vier nicht in derselben Ebene liegende Puncte enthält, so lege man durch irgend drei nicht in einer Geraden liegende Puncte desselben eine Ebene. Da durch jede parallel mit dieser Ebene bewirkte Verschiebung diese sich in sich selbst bewegt, so bilden nach dem Vorigen die in dieser befindlichen Puncte ein System der zweiten Ordnung. Nachdem man dieses auf irgend eine Art parallelogrammatisch abgetheilt hat, nehme man einen der übrigen Puncte des räumlichen Systems, welche der Ebene am nächsten liegen, und ertheile dem System eine Verschiebung, durch welche ein beliebiger Punct in der Ebene nach dem schon aufserhalb derselben gewählten Puncte gelangt. Durch wiederholte Anwendung derselben und der dieser entgegengesetzten Bewegung erhält man offenbar eine parallelepipedische Anordnung des gegebenen Systems und zugleich ist klar, dafs die angegebene Constructon die gehörige Allgemeinheit hat, da die Wahl der ersten Ebene, die Anordnung des Systems

zweiter Ordnung in dieser und endlich die Wahl des Punctes in der nächsten Ebene nach Belieben geschehen kann.

Zum Schlufs dieses Paragraphen wollen wir noch zeigen, dafs, wie man dasselbe System zweiter oder dritter Ordnung auch abtheile, das der jedesmaligen Abtheilung zu Grunde liegende Parallelogramm oder Parallelepipedum immer denselben Inhalt behält, was die geometrische Bedeutung des Satzes ist, dafs äquivalente Formen gleiche Determinanten haben. Denkt man sich nämlich in der Ebene eines Systems zweiter Ordnung eine in sich zurückkehrende Linie, z. B. eine Kreislinie, bezeichnet mit z den von ihr eingeschlossenen Flächenraum und mit s die Anzahl der Puncte im Innern der Linie, wobei es gleichgültig ist, ob man die Puncte auf dem Umfang mitzählen will oder nicht, so hat offenbar der Quotient $\frac{z}{s}$ bei wachsendem Radius den Inhalt eines Grundparallelogramms zur Grenze, woraus, da s und z von der Art der Anordnung des Systems unabhängig sind, der Satz für Systeme zweiter Ordnung erhellt. Ganz auf dieselbe Weise folgt die Richtigkeit der Behauptung für räumliche Systeme.

§. 3.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs ein System zweiter Ordnung sich immer nach einem Grundparallelogramm abtheilen läfst, dessen Seiten nicht gröfser sind als seine Diagonalen.

I. Es sei o ein beliebiger Punct des Systems. Die übrigen Puncte desselben liegen immer paarweise in gleicher Entfernung und entgegengesetzter Richtung von o. Es sei nun p einer der Puncte des Paares, für welches die Entfernung von o kleiner als für jedes andere Paar ist. Findet dieselbe kürzeste Entfernung für mehr als ein Paar Statt, so wähle man p nach Belieben in einem derselben. Das gegebene System besteht aus einer unendlichen Anzahl unter einander congruenter und äquidistanter Systeme erster Ordnung, deren eines dasjenige ist, wozu o und p gehören. In einem der beiden diesem letzteren benachbarten nehme man den Punct q, welcher o am nächsten ist, oder, falls dieselbe kürzeste Entfernung für zwei Puncte Statt finden sollte, einen derselben nach Belieben. Das so erhaltene Parallelogramm $poqr$ hat die verlangten Eigenschaften, da nach der Construction

$op \overline{\gtrless} oq$, $oq \overline{\gtrless} or$, $oq \overline{\gtrless} os = pq$. Ein Grundparallelogramm, welches diese Bedingungen erfüllt, soll fortan ein reducirtes heifsen.

II. Wir haben jetzt die Beziehungen zwischen einem solchen Parallelogramm und dem ebenen System, dem es angehört, festzustellen. Ist $poqr$ ein reducirtes Parallelogramm, so können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, den Winkel poq als nicht stumpf voraussetzen, da im entgegengesetzten Falle der Winkel bei o für das anliegende zu derselben Anordnung gehörige Parallelogramm ein spitzer ist, und eben so können wir $op \leqq oq$ annehmen. Alsdann ist offenbar $or > oq$, und wir haben nur noch die Bedingung $pq \geqq oq$ zu berücksichtigen. Dies vorausgesetzt und wenn wir zur Abkürzung $op = \sqrt{l}$, $oq = \sqrt{n}$ setzen, so dafs also $l \leqq n$, läfst sich die Beziehung unseres Parallelogramms zum gesammten Punctensystem dahin aussprechen, dafs das Minimum der Entfernung irgend eines Punctes des Systems von o, $= \sqrt{l}$, und dafs, nachdem man einen Punct in dieser Entfernung gewählt, in allen noch übrigen Richtungen, d. h. aufserhalb der von o nach dem ersteren gezogenen Geraden, das zweite Minimum $= \sqrt{n}$ ist. Das eben Gesagte gilt ganz allgemein, was wir jetzt hinzufügen, dafs nämlich das erste Minimum nur für den Punct p (wenn wir von zwei Gegenpuncten immer nur einen erwähnen), das zweite nur für q Statt findet, mit folgenden Ausnahmen:

1°. Ist $op < oq$, $oq = pq = os$, so findet das erste Minimum nur für p, das zweite für q oder s Statt.

2°. Ist $op = oq$, $oq < pq = os$, so sind die Minima gleich und man kann p und q mit einander vertauschen.

3°. Ist endlich $op = oq = pq = os$, so kann man einen der Puncte p, q, s als ersten Punct, und dann einen der übrigen als zweiten wählen.

Um das eben Behauptete zu beweisen, haben wir offenbar, da Gegenpuncte immer gleich weit von o entfernt sind, nur zu zeigen, dafs q näher bei o liegt, 1°. als alle übrigen Puncte in der Geraden sqr, mit Ausnahme des Punctes s, dessen Entfernung von o, nach der Voraussetzung $= os = pq \geqq oq$, und 2°. als alle Puncte der folgenden Parallellinien.

Da $pq \geqq op$, $pq \geqq oq$, und Winkel poq nicht stumpf ist, so hat das Dreieck opq und also auch das mit ihm congruente oqs keinen stumpfen Winkel; es fällt daher das von o auf qs herabgelassene Perpendikel zwischen s und q (incl.), womit der erste Punct erledigt ist.

Setzt man $\cos poq = \frac{m}{\sqrt{ln}}$, wo also m nicht negativ ist, so hat man $\overline{pq}^2 = l - 2m + n \geqq \overline{oq}^2 = n$, und folglich $2m \leqq l$, $2m \leqq n$, $4m^2 \leqq ln$. Setzt man noch das Quadrat der Höhe unseres Parallelogramms ($op = \sqrt{l}$ als Grundlinie betrachtet) $= k$, so erhält man für das Quadrat $\varDelta$ seines Inhalts, $\varDelta = lk = ln - m^2 \geqq \frac{3}{4} ln$, und folglich $\sqrt{k} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{(3n)}$. Hiernach ist schon die zweite Parallellinie wenigstens um $\sqrt{(3n)} = \overline{oq}\sqrt{3}$ entfernt, und auch der zweite Punct bewiesen.

III. Da die successiven Minima $\sqrt{l}$, $\sqrt{n}$ durch das System an sich und unabhängig von jeder bestimmten Anordnung desselben bestimmt sind, und andrerseits, wie wir so eben gesehen haben, der Gröfse nach mit den Seiten des reducirten Parallelogramms übereinstimmen, so sieht man, dafs, wenn das System verschiedene Anordnungen dieser Art gestattet, die Seiten der reducirten Parallelogramme immer die Werthe $\sqrt{l}$ und $\sqrt{n}$ behalten werden. Man wird daher nothwendig alle möglichen Grundparallelogramme erhalten, wenn man von o aus nach allen nächsten Puncten (immer mit Ausschlufs der Gegenpuncte) Linien zieht, und dann in einer der jedesmaligen nächsten Parallellinien den nächsten oder die beiden nächsten Puncte nimmt, und da nach dem so eben (II.) Bewiesenen, dieser nächste oder diese nächsten Puncte näher bei o liegen als alle Puncte der folgenden Parallellinien, so kann man von der Bedingung absehen, dafs die zweiten Puncte in der ersten Parallellinie zu nehmen sind. Es werden sich daher alle möglichen Anordnungen des Systems ergeben, wenn man o nacheinander mit allen Punctenpaaren verbindet, für welche die successiven Minima Statt finden, woraus mit Berücksichtigung von (II.) sogleich folgt, dafs es im Allgemeinen und in dem zweiten der dort erwähnten singulären Fälle nur eine solche Anordnung, im ersten und dritten Ausnahmefalle dagegen resp. zwei und drei Anordnungen des Systems giebt.

In unsern jetzigen Zeichen entsprechen die eben erwähnten singulären Fälle den Voraussetzungen $2m = l < n$, $2m < l = n$, $2m = l = n$.

§. 4.

Wir haben bisher nur Eigenschaften der geometrischen Gebilde behandelt, welche als die constructive Repräsentation bekannter Sätze aus der Theorie der Formen anzusehen und schon in dem in der Einleitung angeführten Aufsatz angedeutet sind. Es ist jetzt noch eine Aufgabe anderer Art zu lösen, die

Aufgabe nämlich, wenn ein System zweiter Ordnung gegeben und ein bestimmter Punct o desselben bezeichnet ist, den Theil der Ebene zu bestimmen, innerhalb dessen jeder Punct näher bei o als bei irgend einem andern Puncte des Systems liegt. Da die Bedingung, dafs ein Punct nicht weiter von o als von einem andern v liege, darin besteht, dafs der Punct mit o auf derselben Seite des in der Mitte von ov errichteten Perpendikels sich befinde, so werden wir also o mit allen übrigen Puncten des Systems zu combiniren und das von allen entsprechenden Perpendikeln gebildete convexe Vieleck zu construiren haben. Aber von diesen Perpendikeln in unendlicher Anzahl kommt nur eine beschränkte Anzahl in Betracht, indem die übrigen das durch diese bestimmte Vieleck nicht treffen. Wir behalten alle obigen Annahmen bei, so dafs also in dem reducirten Parallelogramm poq, $op \leqq oq$, der Winkel poq nicht stumpf und opq, oqp spitz sind. Dies vorausgesetzt, ist leicht zu beweisen, dafs man nur die 6 Eckpuncte p, q, s, p', q', s' der vier in o zusammenstofsenden Parallelogramme zu berücksichtigen hat, und dafs selbst die s und s' entsprechenden Perpendikel die zu bildende Figur in dem besondern Falle, wenn poq ein rechter ist, nur streifen, wo dann aber dasselbe von den r und r' entsprechenden Perpendikeln geschieht. Zieht man die Geraden pq, os, $p'q'$, os', so erhält man die 6 congruenten Dreiecke

$$poq, \quad qos, \quad sop', \quad p'oq', \quad q'os', \quad s'op.$$

Berücksichtigt man nur die Puncte p, q, s, p', q', s', so hat man in den Mitten der von o nach diesen gehenden Geraden Perpendikel zu errichten, d. h. dieselbe Construction zu machen, als wenn man für die genannten Dreiecke die Mittelpuncte der umschriebenen Kreise finden wollte. Da in den Dreiecken kein stumpfer Winkel vorkommt, so werden sich je zwei aufeinanderfolgende Perpendikel nicht aufserhalb des entsprechenden Dreiecks schneiden. Man erhält so das Sechseck $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ mit dem Mittelpunct o und gleichen gegenüberliegenden Winkeln und Seiten als den Raum innerhalb dessen jeder Punct weniger weit von o entfernt ist, als von einem der Puncte p, q, s, p', q', s', und überzeugt sich leicht, dafs mit Ausnahme von r und r', die den übrigen entsprechenden Perpendikel unser Sechseck nicht treffen, bei welchem Nachweis man sich wegen der Symmetrie auf die Puncte in und über pop' beschränken kann. Für die Puncte in pop' ist dies klar, für die andern wird es daraus erhellen, dafs ihre Entfernung von o gröfser ist als der Durchmesser des um das Sechseck beschriebenen Kreises. Nennt man das Quadrat seines Radius ϱ, so hat

man $4\rho = \frac{ln(l-2m+n)}{\varDelta}$, woraus wegen $2m \leqq l$, $2m \leqq n$, $\varDelta \geqq \frac{3}{4}ln$, folgt $4\rho \leqq \frac{4}{3}(l-2m+n) \leqq \frac{8}{3}n$. Da nun für die Puncte der zweiten und der folgenden Parallellinien, wie schon bemerkt, das Quadrat ihrer Entfernung von o wenigstens $3n$ beträgt, so bleiben blofs noch die Puncte in $csqr$, aufser s, q, r zu betrachten. Von allen diesen ist aber keiner näher bei o als t, für den das Quadrat der Entfernung $= 4l - 4m + n > 4\rho$, wie man sogleich sieht, wenn man mit $\varDelta$ multiplicirt und dann $2m \leqq l \leqq n$ berücksichtigt. Was den Punct r betrifft, so überzeugt man sich auf dieselbe Weise, dafs das Quadrat seiner Entfernung von o, $l+2m+n > 4\rho$, den einzigen Fall ausgenommen, wo $m=0$, in welchem das entsprechende Perpendikel streift. Es ist also bewiesen, dafs jeder Punct im Innern des Sechsecks $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ und nur ein solcher dem Puncte o näher liegt, als irgend einem andern des Systems. Auf jeder Seite wird die Entfernung von o der Entfernung von einem zweiten Puncte gleich, welcher z. B. für $\alpha\beta$ der Punct q ist, und jeder Eckpunct der Figur ist in gleicher Entfernung von o und noch zwei andern Puncten des Systems, welche letztere Aussage nur in dem besondern Falle eine Modification erleidet, wenn der Winkel poq ein rechter ist; alsdann fallen β und γ, β' und γ' zusammen, und das Sechseck wird zu einem Rechteck, dessen Ecken von o und noch 3 andern Puncten des Systems gleich weit entfernt sind.

Es versteht sich von selbst, dafs man immer dasselbe Sechseck erhalten wird, welches reducirte Parallelogramm man auch in den singulären Fällen, wo mehr als eines existirt, der Construction zu Grunde lege, so wie auch, dafs die allen Puncten des Systems entsprechenden Sechs- oder Vierecke congruent sind und die ganze Ebene desselben bedecken.

Wir bemerken noch, dafs wie man sich leicht überzeugt, der Ausdruck $\rho = \frac{ln(l-2m+n)}{4(ln-m^2)}$, wenn man darin, l und n constant voraussetzend, m von Null bis zu seiner Grenze $\frac{1}{2}l$ wachsen läfst, abnimmt, so dafs also,

$$(1.) \qquad \rho \leqq \tfrac{1}{4}(l+n) \leqq \tfrac{1}{2}n.$$

Auch findet noch die folgende Ungleichheit Statt:

$$(2.) \qquad 2\varDelta(n-\rho) \geqq ln^2,$$

deren Richtigkeit sogleich erhellt, wenn man mit 2 multiplicirt, alles auf eine Seite bringt, und dann $\varDelta = ln - m^2$, $4\varDelta\rho = ln(l-2m+n)$ einsetzt, wodurch sie in $ln(l-2m) + 2mn(n-l) \geqq 0$ übergeht.

§. 5.

Wir kommen nun zu unserm eigentlichen Gegenstande, und haben nachzuweisen, dafs sich jedes System dritter Ordnung nach einem Parallelepipedum anordnen läfst, dessen Flächen reducirte Parallelogramme sind, und dessen Kanten, von denen immer je vier einander gleich sind, seine Diagonalen nicht übertreffen. Nachdem man einen beliebigen Punct (0) des Systems fixirt hat, wähle man in dem Paare von Gegenpuncten, für welche die Entfernung von (0) ein Minimum ist, oder wenn das Minimum der Entfernung für mehrere Paare Statt findet, nach Belieben in einem dieser Paare einen Punct (1). Von allen Puncten aufserhalb der Geraden (01) wähle man wieder einen der beiden nächsten (2), wobei wieder die Wahl unter verschiedenen Paaren, für die dieselbe kürzeste Entfernung Statt findet, nach Belieben geschehen kann. Da im ganzen System mit Ausnahme der Puncte in (01) kein Punct näher bei (0) liegt als (2), so gilt dasselbe auch von der Ebene (102) und für das in dieser enthaltene System ist (102) ein reducirtes Parallelogramm (§. 3, III.). Nimmt man nun in einer der beiden nächsten Parallelebenen den bei (0) nächsten Punct oder einen der nächsten, wenn das Minimum für mehr als einen Statt findet, und verbindet (0) mit dem gewählten Punct (3), so wird das Parallelepipedum unter den Kanten (01), (02), (03), wie leicht zu sehen, der Forderung genügen. Zunächst folgt aus der Construction $(01) \leqq (02) \leqq (03)$. Da für die Grundflächen des Parallelepipedum (als solche werden wir immer diejenigen einander gegenüberliegenden Flächen bezeichnen, in denen die beiden die dritte an Gröfse nicht übertreffenden Kanten verkommen, und die Benennung Seitenflächen auf die vier übrigen anwenden) schon bewiesen ist, dafs sie reducirte sind, so haben wir vermöge der eben bemerkten doppelten Ungleichheit, nur noch zu zeigen, dafs die 4 Diagonalen der Seitenflächen, so wie die 4 Diagonalen des Körpers nicht kleiner als (03) sind. Nun stimmen aber die 8 genannten Diagonalen, wie man sogleich sieht, der Gröfse nach mit den 8 Verbindungslinien überein, welche von (0) nach den in der Ebene der obern Grundfläche um (3) herumliegenden 8 Puncten gezogen werden können, wenn wir so der Bequemlichkeit wegen die 8 Eckpuncte der in (3) zusammenstofsenden 4 Parallelogramme bezeichnen. Dafs aber von den genannten Verbindungslinien keine kleiner als (03) ist, folgt aus der Bedingung, nach welcher (3) gewählt worden ist.

Nachdem wir uns überzeugt haben, dafs ein System dritter Ordnung immer nach einem reducirten Parallelepipedum abgetheilt werden kann, haben

wir nun die Beziehungen zwischen einem solchen und dem System festzustellen und namentlich die Entfernungen der Puncte des Systems von (0) mit einander zu vergleichen. Wir setzen $(01) = \sqrt{a}$, $(02) = \sqrt{b}$, $(03) = \sqrt{c}$, und halten immer die Voraussetzung $a \leqq b \leqq c$ fest.

1°. In der Ebene der Grundfläche finden die oben (§. 3, II.) besprochenen Verhältnisse Statt, so dafs also die successiven Minima der Entfernung der Gröfse nach hier immer $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ sind, wobei dann in den dort erwähnten singulären Fällen eine Willkür in der Wahl der Puncte Statt findet.

2°. Betrachten wir jetzt die Puncte aufserhalb der Ebene der unteren Grundfläche und zwar zunächst die in der Ebene der obern Grundfläche. Da nach der Voraussetzung, dafs unser Parallelepipedum ein reducirtes ist, die Linie (03) nicht gröfser ist als eine der von (0) nach den 8 um (3) herumliegenden Puncten gezogenen Geraden, so wird also der Fufspunct des von (0) auf die Ebene der obern Grundfläche herabgelassenen Perpendikels nicht weiter von (3) als von einem der genannten 8 Puncte entfernt sein. Dieser Fufspunct fällt also nicht aufserhalb des im vorigen Paragraphen construirten zu (3) gehörigen Sechs- oder Vierecks. Von jenen 8 Puncten kann ausnahmsweise einer, wenn der Fufspunct auf eine Seite fällt, oder können zwei (drei, wenn das Vieleck ein Rechteck wird), wenn er mit einem Eckpunct zusammenfällt, dem Fufspunct eben so nahe liegen, als der Punct (3), während alle übrigen Puncte der Ebene von demselben entfernter sind. Es folgt daraus, dafs die kürzeste Entfernung von (0) nach einem Puncte in der obern Grundfläche $\sqrt{c}$ beträgt, im Allgemeinen nur für (3) gilt, aber ausnahmsweise noch für einen, zwei oder gar drei andere Puncte Statt finden kann.

3°. Für die Betrachtung der folgenden Parallelebenen haben wir eine Grenze für das Quadrat h des schon erwähnten Perpendikels zu bestimmen. Da der Fufspunct desselben nicht aufserhalb des zu (3) gehörigen Sechsecks fällt, so hat man $h \geqq c - \rho$, wenn ρ das Quadrat des Radius des umgeschriebenen Kreises bezeichnet. Nun ist aber auch nach (§. 4.) $\rho \leqq \frac{1}{2}b \leqq \frac{1}{2}c$, folglich $h \geqq \frac{1}{2}c$. Da mithin schon die zweite Parallelebene wenigstens um $\sqrt{(2c)}$ entfernt ist, so giebt es über der obern Grundfläche nur Puncte, deren Entfernung von (0) gröfser als $\sqrt{c}$ ist.

Fafst man das Gesagte zusammen, so sieht man, dafs das Minimum der Entfernung für das ganze System den Werth $\sqrt{a}$ hat, dafs, nachdem ein Punct in dieser Entfernung gewählt ist, das Minimum in den noch übrigen Richtungen, $\sqrt{b}$ beträgt und dafs endlich, nachdem auch der zweite Punct fixirt worden, für

alle Puncte aufserhalb der Ebene, welche durch (0) und die beiden ersten Puncte bestimmt wird, die kleinste Entfernung von (0) sich auf $\sqrt{c}$ reducirt. Sind aber auch die successiven Minima $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, der Gröfse nach immer völlig bestimmt, so gilt dasselbe in örtlicher Beziehung nicht ohne einige leicht aufzuzählende Ausnahmen. Ist z. B. $a \leqq b$, $b < c$, so sind die beiden ersten Puncte in der untern Grundfläche zu wählen, wobei die in (§. 3. II.) erwähnten singulären Fälle Statt finden können, während der dritte Punct in der obern Grundfläche liegt, dort im Allgemeinen eine bestimmte Lage hat, in singulären Fällen jedoch zwei, drei oder vier verschiedene Stellen einnehmen kann. Eben so leicht übersieht man, welche Varietäten in den beiden andern Fällen, wo $a < b = c$, oder $a = b = c$, eintreten können.

Da aus der Voraussetzung eines reducirten Parallelepipedum mit den Kanten $\sqrt{a} \leqq \sqrt{b} \leqq \sqrt{c}$, die Längen dieser Kanten sich als die successiven Minima des Systems ergeben haben, so folgt sogleich, dafs, wenn mehrere reducirte Parallelepipeda existiren, nach welchen das System angeordnet werden kann, diese hinsichtlich der Länge ihrer Kanten alle unter einander übereinstimmen werden, und es läfst sich auch leicht zeigen, dafs drei von (0) nach Puncten des Systems gerichtete Linien von den Längen $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, wenn sie nur nicht in einer Ebene liegen, immer die Kanten eines reducirten Parallelepipedum sind. Es bedarf dazu nur der einfachen schon in einem ähnlichen Falle (§. 3. III.) angewandten Betrachtung. Da hiernach sämmtliche reducirte Parallelepipeda des Systems erhalten werden, wenn man die successiven Minima auf alle möglichen Arten construirt, so erhellt, dafs, wenn dies nur auf eine Weise geschehen kann, wohin wir auch den Fall rechnen, wo bei der Gleichheit von zweien der Gröfsen $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, oder bei der Gleichheit von allen dreien, die drei Linien örtlich völlig bestimmt sind und nur eine Vertauschung zwischen zweien oder allen dreien Statt finden kann, das räumliche System nur eine Anordnung nach einem reducirten Parallelepipedum zuläfst. In allen andern Fällen giebt es mehrere solche Anordnungen, denen Parallelepipeda zu Grunde liegen, die entweder alle von einander verschieden, oder zum Theil oder sogar alle unter einander congruent sein können. (Ähnlicher Weise waren in den zwei oben erwähnten singulären Fällen eines Systems zweiter Ordnung, die den zwei oder drei verschiedenen Anordnungen zu Grunde liegenden reducirten Parallelogramme unter einander congruent.)

Zur Entscheidung der Frage, ob ein System dritter Ordnung nur eine einzige oder mehr als eine Anordnung nach einem reducirten Parallelepipedum

gestattet, wird es somit nur der Kenntnifs einer einzigen Anordnung des Systems bedürfen und der erste Fall wird immer und ausschliefslich dann Statt finden, wenn das durch diese Anordnung gegebene reducirte Parallelepipedum von solcher Beschaffenheit ist, dafs alle Linien, welche von anderen nicht übertroffen werden dürfen, diese wirklich übertreffen, d. h. wenn alle Diagonalen der Flächen gröfser als die Seiten derselben, und eben so alle Diagonalen des Parallelepipedum gröfser als die Kanten des Körpers sind.

§. 6.

Indem wir jetzt die Resultate des vorigen Paragraphen auf die ternären Formen übertragen, soll der Gleichförmigkeit wegen und zur Vermeidung unnützer Unterscheidungen vorausgesetzt werden, dafs man jeder ternären Form

$$(1.)\quad ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'xy$$

durch Vertauschung oder Zeichenänderung der unbestimmten Elemente, wodurch die Form nicht aufhört derselben Classe anzugehören, eine solche Gestalt gegeben habe, dafs erstens $a\leqq b\leqq c$, zweitens unter den Coëfficienten a', b', c', wenn sie nicht alle drei von Null verschieden und negativ sind, keiner das negative Zeichen habe, und dafs endlich drittens, wenn $b=c$, abgesehen vom Zeichen c' nicht gröfser als b', wenn $a=b$, b' nicht gröfser als a', und wenn endlich $a=b=c$, weder c' gröfser als b', noch b' gröfser als a' sei. Wie leicht zu sehen, läfst sich diesen Bedingungen immer nur auf eine Weise genügen, und die Einführung derselben gewährt den Vortheil, dafs, wie schon ohne diese Bedingungen jeder ternären Form ein völlig bestimmtes Parallelepipedum entspricht, nun auch zu jedem Parallelepipedum ein analytischer Ausdruck gehört, dessen Coëfficienten auch hinsichtlich ihrer Aufeinanderfolge und ihrer Zeichen völlig bestimmt sind. Dies vorausgesetzt, nennen wir die Form (1.), in der also $a\leqq b\leqq c$, eine reducirte, wenn sie einem reducirten Parallelepipedum entspricht. Da die Diagonalen der Flächen nicht kleiner als die Seiten derselben sein dürfen, so hat man

$$a\pm 2c'+b\geqq b,\quad a\pm 2b'+c\geqq c,\quad b\pm 2a'+c\geqq c.$$

Setzt man $\sigma=-1$, wenn a', b', c' alle drei negativ sind, sonst $\sigma=1$, so sind diese Bedingungen gleichbedeutend mit

$$(2.)\quad a\geqq 2c'\sigma,\quad a\geqq 2b'\sigma,\quad b\geqq 2a'\sigma,$$

und nur, wenn das Gleichheitszeichen Statt findet, wird in dem entsprechenden Parallelogramm die eine der Diagonalen einer Seite gleich sein. Die Bedingungen

hinsichtlich der Diagonalen des Parallelepipedum ergeben

$$a+b+c+2a'\varepsilon+2b'\delta+2c'\delta\varepsilon \geqq c,$$

wo die Zeichen in $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$, beliebig sind. Betrachtet man zunächst den Fall, wo keiner der Coëfficienten a', b', c' negativ ist, und berücksichtigt die vier Zeichencombinationen, so wie dafs wenn $a=b$, $b'\leqq a'$ ist, so sieht man sogleich, dafs unsere Ungleichheit vermöge der schon erhaltenen Bedingungen immer von selbst erfüllt ist, und dafs der Grenzfall des Gleichheitszeichens, worin die Diagonale der Kante $\sqrt{c}$ gleich wird, nur einmal und nur dann eintreten kann, wenn eine der Gröfsen b', c' Null ist und zugleich die der andern so wie die a' entsprechende Bedingung (2.) ebenfalls den Grenzfall der Gleichheit darbietet. Sind a', b', c' negativ, so ist unsere Ungleichheit immer und zwar so erfüllt, dafs der Grenzfall nicht Statt finden kann, aufser wenn $\delta=\varepsilon=1$, so dafs also die neue Bedingung

$$(3.)\qquad a+b+2a'+2b'+2c'\geqq 0$$

aufzustellen ist, wo wieder das untere Zeichen sich auf das Gleichwerden einer Diagonale mit der Kante $\sqrt{c}$ bezieht.

Sind die eben entwickelten Bedingungen (2.) und, wenn a', b', c' negativ sind, überdies (3.) so erfüllt, dafs in keiner der Ungleichheiten der Grenzfall der Gleichheit Statt findet, so wird es in der Classe, wozu die Form gehört, nicht noch eine zweite von dieser verschiedene mit oder ohne Gleichheitszeichen in den Definitionsbedingungen geben, da nach dem am Ende des vorigen Paragraphen Bemerkten das entprechende Punctensystem nur nach einem reducirten Parallelepipedum abgetheilt werden kann. Anders verhält sich die Sache, wenn nicht in allen Bedingungen die obern Zeichen Statt finden; es können alsdann in derselben Classe mehrere reducirte Formen vorkommen, die sich dann aus einer gegebenen ableiten lassen. Es wird genügen, dies für einen Hauptfall zu zeigen. Wir wählen dazu den Fall wo $b<c$.

Setzt man zunächst $a>2c'\sigma$ voraus, so kann nur die Richtung der Kante $\sqrt{c}$ verändert werden, wenn es nämlich in der Ebene der obern Grundfläche noch einen oder mehrere Puncte giebt, deren Entfernung vom Scheitel $\sqrt{c}$ beträgt. Sind ξ, η, 1 die einem solchen Puncte entsprechenden Werthe der Elemente, so werden, wenn die dritte Kante nach demselben gerichtet wird, alle Coëfficienten bis auf a', b' ungeändert bleiben, diese aber resp. in $a'+c'\xi+b\eta$, $b'+a\xi+c'\eta$ übergehen, wie man sich leicht und fast ohne Rechnung überzeugt. Nun sind aber nach der vorher gemachten Aufzählung,

wenn $a = 2b'\sigma$, die Werthe von ξ, η, welche die Bedingung erfüllen, $\xi = -\sigma$, $\eta = 0$; wenn $b = 2a'\sigma$, hat man $\xi = 0$, $\eta = -\sigma$; wenn gleichzeitig $a = 2b'$, $b = 2a'$, $c' = 0$, ist $\xi = -1$, $\eta = -1$, und wenn endlich a', b', c' negativ sind und die Gleichung $a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0$ erfüllen, ist $\xi = 1$, $\eta = 1$ zu setzen. Diesen vier Voraussetzungen entsprechend, hat man also a', b' in $a' - c'\sigma$, $b' - a\sigma$, $(= -b')$; $-a'$, $b' - c'\sigma$; $-a'$, $-b'$; $a' + b + c'$, $a + b' + c'$ zu verwandeln. Von dem dritten Falle und überhaupt von der Annahme $c' = 0$ kann man absehen, da dieser eine neue Form entspricht, welche, nachdem man in derselben die zu Anfang dieses Paragraphen vorgeschriebenen Zeichenänderungen vorgenommen hat, offenbar mit der Form, wovon man ausgegangen ist, identisch wird. In jeder der drei übrigen Voraussetzungen erhält man nach Anwendung der erforderlichen Zeichenänderungen eine derselben Classe angehörige neue reducirte Form (falls sie nicht mit der ursprünglichen coïncidirt), und man erhält zwei solche Formen, wenn zwei unserer Voraussetzungen zugleich bestehen. Damit ist dann die Aufzählung der Formen beendigt, da offenbar die Gleichzeitigkeit von allen drei Voraussetzungen nicht Statt finden kann. Wäre immer unter der Voraussetzung $b < c$, $a = 2c'\sigma$ gewesen, so hätte man, falls $a < b$, die zweite Kante in der Grundfläche drehen, für $a = b$, auch noch die erste Kante in die ursprüngliche Lage der zweiten übergehen lassen, und diese neue oder diese beiden neuen Lagen der zwei ersten Kanten mit allen Richtungen der dritten, die ursprüngliche nicht ausgenommen, in Verbindung bringen müssen.

Man kann dem Übelstande, dafs sich in singulären Fällen mehrere reducirte Formen in derselben Classe befinden können, leicht abhelfen, und diese Ausnahmen dadurch entfernen, dafs man für solche singuläre Fälle in die allgemeine Definition noch gewisse secundäre Bedingungen aufnimmt, die sich leicht ergeben, wenn man z. B. die Forderung aufstellt, dafs der letzte Coëfficient c', falls er nicht völlig bestimmt ist, den kleinsten numerischen Werth erhalte, dessen er in den reducirten Formen der Classe fähig ist, und dann eben so in Bezug auf b' verfährt. Um dies an einem Beispiel zu zeigen, wollen wir unter den vorher behandelten singulären Fällen den betrachten, wo $b < c$, von den drei Bedingungen (2.) keine mit dem untern Zeichen gilt, dagegen die drei negativen Werthe a', b', c' die Gleichung $a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0$ erfüllen. Nach dem vorher Bemerkten ist c' bestimmt, und giebt es für diesen Fall nur zwei reducirte Formen. Sind a' und b' die Werthe des vierten und fünften Coëfficienten in einer derselben, so sind

sie in der anderen $a'+b+c'$, $a+b'+c'$, oder, da diese letzteren Werthe offenbar positiv sind, c' aber negativ und folglich, um der Zeichenvorschrift zu genügen, z in $-z$ zu verwandeln ist, vielmehr $-(a'+b+c')$, $-(a+b'+c')$; welche Werthe, wie es in der Natur der Sache liegt, wenn man sie für a', b' substituirt, wieder der Gleichung $a+b+2a'+2b'+2c'=0$ genügen, und aus welchen die Werthe a', b' auf dieselbe Weise hervorgehen, wie sie selbst aus a', b' entstanden sind. Da hiernach der fünfte Coëfficient nur die beiden negativen Werthe b' und $-(a+b'+c')$ zuläfst, deren Summe $=-a-c'$, so sieht man, dafs, wenn man zu den Definitionsbedingungen noch $-b' \leqq \frac{1}{2}(a+c')$ hinzufügt, die Classe nur eine reducirte Form enthalten wird.

Indem wir die Abhandlung beschliefsen, wollen wir noch aus unsern Principien einen schönen, von *Seeber* durch Induction gefundenen und von *Gaufs* in der schon oft erwähnten Anzeige bewiesenen Satz ableiten. Nach diesem Satze ist in einer reducirten Form das Product der drei ersten Coëfficienten nicht gröfser als der doppelte absolute Werth der Determinante.

Da der absolute Werth der Determinante dem Quadrate des Rauminhaltes des der Form entsprechenden Parallelepipedum gleich ist, so haben wir also mit Beibehaltung der in §. 3. gebrauchten Bezeichnung die Ungleichheit

$$abc \leqq 2\Delta h$$

zu beweisen, worin Δ das Quadrat der Grundfläche bedeutet. Setzt man $c=b+t$, wo also t nicht negativ ist, zieht von der dort erhaltenen Ungleichheit $h \geqq c-\varrho = b-\varrho+t$, nachdem man sie mit 2Δ multiplicirt hat, die Gleichung $abc = ab^2+abt$ ab, so erhält man

$$2\Delta h - abc \geqq 2\Delta(b-\varrho) - ab^2 + (2\Delta - ab)t.$$

Da nun nach der am Ende von §. 4. bewiesenen Ungleichheit $2\Delta(b-\varrho)-ab^2$ nicht negativ und $2\Delta - ab \geqq \frac{1}{2}ab$ positiv ist, so erhellt die Wahrheit des Satzes.

Berichtigungen.

Seite 210 Zeile 11 v. u. lies $+2c'xy$ statt $+2c'yz$
- 213 - 10 - - l. identisch st. identich

21.

Über die Zerlegbarkeit der Zahlen in drei Quadrate.

(Von Herrn Prof. G. *Lejeune Dirichlet* zu Berlin.)

Die Theorie der Zerlegung der ganzen Zahlen n, welche nicht eine der Formen $4k$, $8k+7$ haben, in drei Quadrate ohne gemeinschaftlichen Theiler, gehört zu den complicirteren der höhern Arithmetik, wenn man diese Theorie vollständig entwickeln, d. h. nicht blofs die Zerlegbarkeit nachweisen, sondern zugleich die Anzahl aller möglichen Zerlegungen bestimmen will, welche Anzahl entweder durch die der binären Formen für die Determinante $-n$, wie es *Gaufs* zuerst gezeigt hat *), oder auch unabhängig von dieser letzteren ausgedrückt werden kann **). Da es jedoch Fälle giebt, in denen nur die Zerlegbarkeit vorauszusetzen ist, wie denn namentlich der von *Cauchy* gegebene ***), später von *Legendre* vereinfachte Beweis des *Fermat*'schen Satzes über die Polygonalzahlen lediglich darauf beruht, dafs jede Zahl, mit Ausnahme der vorher ausgeschlossenen, die Summe von drei Quadraten ist, so scheint ein einfacher Beweis für die Zerlegbarkeit nicht ganz ohne Interesse zu sein. Ein solcher soll in diesem Aufsatz mitgetheilt werden.

Zunächst bedarf man dazu des bekannten Satzes, dafs jede positive ternäre Form von der Determinante -1, d. h. jeder Ausdruck wie

$$(1.)\quad ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'xz+2c'xy,$$

dessen ganzzahlige Coëfficienten der Gleichung

$$(2.)\quad aa'^2+bb'^2+cc'^2-abc-2a'b'c' = -1$$

genügen und überdies die Bedingungen erfüllen, dafs

$$a,\ b,\ c,\ bc-a'^2,\ ac-b'^2,\ ab-c'^2$$

positiv sind, von welchen Bedingungen übrigens die erste und vierte die übrigen involviren, mit der Form

$$(3.)\quad x^2+y^2+z^2$$

äquivalent ist. Zum Beweise dieses Satzes genügt es, sich zu überzeugen, dafs für die Determinante -1 der Ausdruck (3.) die einzige reducirte positive Form ist. Soll die Form (1.) eine reducirte sein, so darf nach dem

---

*) Disq. arith. art. 229.
**) *Crelle's* Journal Band 21. Seite 155.
***) Exercices de math. par *Cauchy*, sec. année, page 265.

am Ende der vorhergehenden Abhandlung bewiesenen Satz, abc nicht gröfser als 2 sein, woraus, wenn man $a \leqq b \leqq c$ voraussetzt, sogleich $a = b = 1$ folgt. Da nun aber andrerseits nach der Definition der reducirten Formen, $2c'$ und $2b'$, abgesehen vom Zeichen, nicht gröfser als a, $2a'$ nicht gröfser als b sein darf, so erhält man $a' = b' = c' = 0$, und dann aus (2.), $c = 1$.

Dies vorausgesetzt, wird die Zerlegbarkeit der positiven Zahl a dargethan sein, sobald man eine positive ternäre Form (1.) von der Determinante -1 gefunden hat, deren erster Coëfficient a ist. Da nämlich eine solche Form mit der Form (3.) äquivalent ist, so kann letztere in sie transformirt werden, und man erhält $a = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2$, wo α, α', α'' drei der 9 Substitutionscoëfficienten sind und keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können, da jedes Glied der aus diesen 9 Coëfficienten gebildeten Determinante, entweder α, oder α' oder α'' zum Factor hat, und diese Determinante der Einheit gleich ist.

Alles kommt also darauf hinaus, a als gegeben angenommen, der Gleichung (2.) durch fünf ganze Zahlen b, c, a', b', c' zu genügen, wobei nur noch die einzige Bedingung zu erfüllen ist, dafs $bc - a'^2$ positiv werden mufs. Nimmt man $b' = 1$, $c' = 0$, so wird die Gleichung

$$b = a\Delta - 1,$$

wo $\Delta = bc - a'^2$ gesetzt ist, und man hat nur zu zeigen, dafs man die positive Zahl Δ so wählen kann, dafs $-\Delta$ quadratischer Rest von $b = a\Delta - 1$ wird, indem unter dieser Voraussetzung c und a' sich so bestimmen lassen, dafs man $a'^2 - bc = -\Delta$ hat. Es soll nun nachgewiesen werden, dafs der eben ausgesprochenen Bedingung immer durch einen ungeraden Werth Δ genügt werden kann, für den, wenn a die Form $4k + 2$ hat, $b = a\Delta - 1$ einer ungeraden Primzahl p, wenn a ungerade ist, aber nicht die Form $8k + 7$ hat, dem Doppelten einer solchen Primzahl p gleich wird. Beginnen wir mit dem zweiten Fall, so haben wir die Gleichung $2p = a\Delta - 1$, worin wir zunächst p noch nicht als Primzahl, sondern blofs ungerade voraussetzen. Setzt man $\Delta = 8l + \varepsilon$, wo ε einer der Zahlen 1, 3, 5, 7 gleich ist, so sieht man sogleich, dafs in jedem der vier Fälle, welche a in Bezug auf den Divisor 8 darbieten kann, Δ zwei Formen nach diesem Divisor oder ε zwei Werthe zuläfst, wenn p, wie wir verlangen, ungerade sein soll. Für jeden der sich so ergebenden acht Fälle wende man in der aus $2p = a\Delta - 1$ folgenden Gleichung $\left(\frac{p}{\Delta}\right) = \left(\frac{-2}{\Delta}\right)$, (worin das *Legendre*'sche Zeichen in der von *Jacobi* eingeführten erweiterten Bedeutung gebraucht ist) auf die erste Seite das Recipro-

citätsgesetz an, setze für $\left(\frac{-2}{\Delta}\right)$ seinen bekannten Werth und multiplicire dann mit $\left(\frac{-1}{p}\right)=\pm 1$, wo ± 1 ebenfalls nach der jedesmaligen Linearform von p bekannt sein wird. Man erhält so die Resultate

$$a = 8k+1, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+3, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \\ \Delta = 8t+7, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1, \end{cases}$$

$$a = 8k+3, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+1, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \\ \Delta = 8t+5, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \end{cases}$$

$$a = 8k+5, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+3, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \\ \Delta = 8t+7, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1, \end{cases}$$

$$a = 8k+7, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+1, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1, \\ \Delta = 8t+5, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1. \end{cases}$$

Man sieht, dafs wenn nicht $a=8k+7$, der Bedingung $\left(\frac{-\Delta}{p}\right)=1$, immer genügt werden kann. Dafs aber auch in allen 8 Fällen p eine Primzahl werden kann, erhellt aus dem Ausdruck $p=\frac{1}{2}(a\Delta-1)=4at+\frac{1}{2}(a\varepsilon-1)$, in welchem $\frac{1}{2}(a\varepsilon-1)$ nach der Wahl von ε ungerade und überdies ohne gemeinschaftlichen Theiler mit a ist. Dieser Ausdruck ist also das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe, welche nothwendig Primzahlen enthält. Hat man nun eine Primzahl p, für welche $\left(\frac{-\Delta}{p}\right)=1$, so ist $-\Delta$ quadratischer Rest von p und folglich auch von $2p$, w. z. b. w.

Im Falle eines geraden a setzen wir sogleich $a=4k+2$, da man im voraus weifs, dafs für $a=4k$ die Bedingung sich nicht erfüllen läfst. Da wir in der Gleichung $p=a\Delta-1$, Δ ungerade voraussetzen, so hat p die Form $4s+1$, und man erhält $\left(\frac{-1}{\Delta}\right)=\left(\frac{p}{\Delta}\right)=\left(\frac{\Delta}{p}\right)=\left(\frac{-\Delta}{p}\right)$. Man mufs also Δ die Form $4t+1$ geben, damit $\left(\frac{-\Delta}{p}\right)=1$ werde. Man erhält so $p=4at+a-1$, welcher Ausdruck wieder eine Primzahl werden kann, wo dann $-\Delta$ quadratischer Rest von p ist.

Die Anwendung des eben entwickelten Verfahrens ist nicht auf den Fall der Determinante -1 beschränkt, und wir wollen noch ein zweites Beispiel für die Determinante -3 hinzufügen.

Sucht man wieder wie oben die reducirten Formen für diese Determinante, so giebt die Bedingung $abc \leqq 6$, unter der Voraussetzung $a \leqq b \leqq c$, für a den Werth 1, während $b = 1$ oder $= 2$ sein kann. Es folgt dann, da $2c'$ und $2b'$ numerisch nicht gröfser als $a = 1$ sein dürfen, $b' = c' = 0$ und die Gleichung, durch welche die Determinante bestimmt wird, reducirt sich auf $a'^2 - bc = -3$. Da nun auch $2a'$ numerisch nicht gröfser als b sein darf, so hat man, wenn $b = 1$ ist, $a' = 0$, und folglich $c = 3$. Ist dagegen $b = 2$, so hat man $2a' = 0$ oder $2a' = \pm 2$. Der erste Werth genügt obiger Gleichung nicht, in welcher $bc \geqq 4$ ist. Es bleibt also nur $a' = \pm 1$ zu setzen, woraus sich $c = 2$ ergiebt. Vernachlässigt man das untere Zeichen, was auf eine blofse Zeichenänderung von z hinauskommt, so erhält man also die beiden reducirten Formen

$$(4.) \qquad x^2 + y^2 + 3z^2, \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz,$$

so dafs also jede positive ternäre Form (1.) von der Determinante -3, d. h. in welcher die Coëfficienten die Gleichung

$$(5.) \qquad aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 - abc - 2a'b'c' = -3$$

befriedigen, einer dieser Formen (4.) äquivalent sein wird. Untersucht man nun die Reste nach dem Divisor 8, welche die Ausdrücke (4.) lassen, wenn man in denselben den Elementen x, y, z alle Combinationen gerader und ungerader Werthe beilegt, wobei nur die Gleichzeitigkeit von drei geraden Werthen auszuschliefsen ist, da wir die Elemente immer ohne gemeinschaftlichen Theiler voraussetzen, so findet man, dafs die erste der Formen (4.) alle möglichen Reste nach dem Modul 8 darbietet, während der zweite Ausdruck für keine Combination eine der Formen $8k+5$, $4k$ annimmt. Erwägt man nun ferner, dafs zwei äquivalente Formen immer dieselben Zahlen darstellen, so wird man für eine Form der Determinante -3, die eine Zahl $8k+5$ oder $4k$ darstellt, was namentlich immer der Fall ist, wenn einer ihrer drei ersten Coëfficienten, z. B. b, eine solche Zahl ist, sogleich schliefsen können, dafs sie nicht mit der zweiten, und folglich, dafs sie mit der ersten der Formen (4.) äquivalent ist.

Soll nun bewiesen werden, dafs die gegebene Zahl a durch die erste der Formen (4.) darstellbar ist, so haben wir nach unserer obigen Betrachtungsweise und indem wir in (5.) wieder $b' = 1$, $c' = 0$ und $\Delta = bc - a'^2$

setzen, nur darzuthun, dafs die positive Zahl Δ so bestimmt werden kann, dafs $b = a\Delta - 3$ die Form $8k+5$ oder $4k$ erhält und $-\Delta$ zugleich quadratischer Rest von b wird. Wir beschränken uns dabei auf die Zahlen a, welche mit der Determinante keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, d. h. nicht durch 3 theilbar sind. Setzt man $\Delta = 8\Delta'$, wo Δ' ungerade und nicht durch 3 theilbar sein soll, so wird b relative Primzahl zu Δ' sein und die Form $8k+5$ enthalten, und wir haben nur noch die andere Bedingung zu erfüllen. Aus der Gleichung $b = 8a\Delta' - 3$ folgt sogleich $\left(\frac{b}{\Delta'}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta'}\right)$, oder, wenn man berücksichtigt, dafs $b \equiv 1 \pmod{4}$, und bekannte Sätze anwendet, $\left(\frac{b}{\Delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{-\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta'}\right)$. Durch Multiplication mit $\left(\frac{8}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right) = -1$ ergiebt sich hieraus $\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = -\left(\frac{-3}{\Delta'}\right)$, und man sieht, dafs die Bedingung $\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = 1$ erfüllt ist, wenn $\Delta' = 6t - 1$ und folglich $b = 48at - 8a - 3$ gesetzt wird. Da nun dieser letzere Ausdruck offenbar einer Primzahl gleich werden kann, so ist bewiesen, dafs jede nicht durch 3 theilbare Zahl so durch die Form $x^2 + y^2 + 3z^2$ ausgedrückt werden kann, dafs x, y und z keinen gemeinschaftlichen Theiler erhalten. Ähnliche Betrachtungen lassen sich auf die durch 3 theilbaren Zahlen, zu deren Darstellbarkeit eine sich leicht ergebende Bedingung erforderlich ist, so wie auch auf die durch die zweite der Formen (4.) ausdrückbaren Zahlen anwenden.

Berlin, im Juni 1850.

22.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

(Von Herrn Dr. *O. d. Broch*, Professor der Mathematik an der Universität zu Christiania in Norwegen.)

Aufgabe.

Wenn zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse gegeben sind, die Axen zu finden.

Auflösung.

Es seien $A'B'$ und $A'C$ (Taf. IV.) die Hälften der gegebenen conjugirten Durchmesser. Man ziehe $A'A$ senkrecht auf AC und gleich $A'C$, construire einen Kreis, dessen Mittelpunct O in der Linie LC liegt und dessen Umfang durch A und B' geht, und ziehe die Sehnen $B'L$ und $B'M$. Die Axen der Ellipse $A'I'$ und $A'G'$ werden dann parallel mit diesen Sehnen gezogen. Um ihre Endpuncte zu finden, ziehe man die Sehnen LA und AM, construire einen Kreis um A' als Mittelpunct und mit $A'A$ als Halbmesser, und ziehe $A'F$ und $A'H$ parallel mit LA und AM; von F und H ziehe man FF' und HH' senkrecht auf LC, und $F'G'$ und $H'I'$ parallel mit $A'B'$. Die Schneidepuncte G' und I' sind dann die Endpuncte der Halbaxen. Oder: man ziehe FG und HI parallel mit AB, wo der Punct B gefunden wird, wenn man $B'B$ senkrecht auf LC zieht, und ziehe dann GG' und II' senkrecht auf LC. Diese beiden Constructionen controliren dann einander

Beweis.

Wenn man LC als Grundlinie annimmt, so läfst sich die Ellipse $NB'C$ als die verticale Spur eines schiefen Cylinders ansehen, dessen Grundfläche der Kreis NAC ist und dessen Seiten den in AB und $A'B'$ horizontal und vertical projectirten Geraden parallel sind. In der verticalen Spur dieser Cylinder sind $A'B'$ und $A'C$ conjugirte Halbmesser, weil sie die verticalen Spuren zweier durch die Axe des Cylinders gehenden Schnitte sind, deren horizontale Spuren auf einander senkrecht stehen. Es sind jetzt die Vierecke $FF'G'A'$ und $AA'B'M$ einander ähnlich, weil die Seiten der Vierecke parallel sind und die Diagonalen $F'A$ und $A'M$ eine gerade Linie bilden. Wenn ferner $G'G$ senkrecht auf LC und folglich parallel mit $B'B$ gezogen wird,

so werden auch FG und AB mit einander parallel sein. Es sind folglich FG und FG' die beiden Projectionen einer Seite des Cylinders, und G' ist dessen verticale Spur; welche folglich in der gegebenen Ellipse liegt. $G'A'$ wird die verticale Spur eines durch diese Seite und die Axe des Cylinders gehenden Schnittes $G'A'$ sein. Eben so findet man, dafs I' die verticale Spur der durch H gehenden Seite des Cylinders ist, folglich auch in der Ellipse liegt, und dafs $I'A'$ die verticale Spur einer durch diese Seite und die Axe des Cylinders gehenden Schnittes $I'A'H$ ist. Da jetzt die horizontalen Spuren $A'F$ und $A'H$ dieser Schnitte auf einander senkrecht sind, so werden die verticalen Spuren $A'G'$ und $A'I'$ conjugirte Halbmesser der Ellipse sein; es sind aber $A'G'$ und $A'I'$ auf einander senkrecht, weil sie mit den Complementsehnen LB' und MB' parallel sind: also müssen sie die gesuchten Halbaxen der gegebenen Ellipse sein.

Diese Construction ist besonders von Nutzen in der beschreibenden Geometrie, wo gewöhnlich die Ellipse nur durch ihre conjugirten Durchmesser bestimmt ist. Soll aber die Ellipse selbst gezeichnet oder construirt werden, so ist es nothwendig, erst ihre Axen bestimmt zu haben.

Geschrieben zu Funchal auf Madeira am 19ten April 1850.

23.

Über ein merkwürdiges, aus einem Eulerschen Satze sich ergebendes Theorem.

(Von dem Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.)

In der „Einleitung u. s. f. Cap. 15." betrachtet *Euler* die Entwicklung der beiden unendlichen Factorenreihen

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)\dots} \text{ und } (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)\dots$$

Setzt man in der ersten für z die Gröfse i, für $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ dagegen die reciproken $n$ten Potenzen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, ..., also $\alpha=\frac{1}{2^n}$, $\beta=\frac{1}{3^n}$, $\gamma=\frac{1}{5^n}$, ..., so ist

$$\frac{1}{\left(1-\frac{i}{2^n}\right)\left(1-\frac{i}{3^n}\right)\left(1-\frac{i}{5^n}\right)\left(1-\frac{i}{7^n}\right)\dots}$$
$$=1-\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{1}{9^n}\dots+i\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}\dots\right]=A+Bi.$$

Im reellen Theil der zweiten Seite dieser Gleichung kommt jede mögliche Gröfse $\frac{1}{a^n}$ (a positiv und ganz) vor, wenn a in seinen Stammfactoren (>1), die gleich oder ungleich sein können, eine *gerade* Anzahl davon hat. Dem Gliede $\frac{1}{a^n}$ ist das Zeichen $+$ vorgesetzt, wenn diese Anzahl von der Form $4r$, das Zeichen $-$ dagegen, wenn sie eine Zahl von der Form $4r+2$ ist. Im imaginären Theile dagegen kommt *jede* Gröfse $\frac{1}{a^n}$ vor, für welche a eine ganze positive Zahl (>1) von einer *ungeraden* Anzahl (gleicher oder ungleicher) Stammfactoren ist; ist diese Anzahl von der Form $4r+1$, so hat $\frac{1}{a^n}$ das Zeichen $+$, ist sie von der Form $4r+3$, so hat $\frac{1}{a^n}$ das Zeichen $-$

Eben so erhält man

$$\left(1-\frac{i}{2^n}\right)\left(1-\frac{i}{3^n}\right)\left(1-\frac{i}{5^n}\right)\dots$$
$$=1-\frac{1}{6^n}-\frac{1}{10^n}-\frac{1}{15^n}\dots+i\left[\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}\dots\right]=A_1+Bi.$$

Im reellen Theile A_1 kommt, aufser 1, *jede* Gröfse $\frac{1}{a^n}$ vor, wenn a eine positive ganze Zahl mit *lauter ungleichen* Stammfactoren und die Anzahl dieser Factoren *gerade* ist; sie hat das Zeichen $+$, wenn diese Anzahl von der Form $4r$, dagegen das Zeichen $-$, wenn sie von der Form $4r+2$ ist. Im imaginären Theile $(B_1 i)$ kommt *jede* Gröfse $\frac{1}{a^n}$ vor, wenn a eine positive ganze Zahl ist, die aus einer *ungeraden* Anzahl lauter *ungleicher* Stammfactoren besteht; ist diese Anzahl von der Form $4r+3$, so hat $\frac{1}{a^n}$ das Zeichen $+$, dagegen das Zeichen $-$, wenn die Anzahl von der Form $4r+1$ ist.

Da für $n>1$ die betreffenden Reihen convergent sind, so erhält man, unter der Voraussetzung eines rationalen $n>1$:

$$(A+Bi)(A_1+B_1 i) = 1,$$

das heifst

$$AA_1 - BB_1 + i(AB_1 + A_1 B) = 1,$$

woraus sich die folgenden zwei merkwürdigen Gleichungen ergeben:

$$AA_1 - BB_1 = 1,$$
$$AB_1 + A_1 B = 0;$$

insofern A, A_1, B, B_1 auf die oben angegebene Art bestimmt werden.

Sinsheim, im Januar 1847.

24.

Beweis des Satzes dafs eine Curve n^{ten} Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat.

(Von Herrn Professor *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

Die Theorie der gegenseitigen Polarität zweier Curven bietet ein Paradoxon dar, dessen Aufklärung mit wichtigen Problemen der Theorie der algebraischen Curven zusammenhängt. Eine Curve (A) vom n^{ten} Grade hat im Allgemeinen eine Polarcurve (B) vom $(n^2-n)^{\text{ten}}$ Grade, die Polarcurve dieser ist aber immer nur wieder vom n^{ten} Grade, nämlich die ursprüngliche Curve (A) selbst, während im Allgemeinen die Polarcurve einer Curve vom $(n^2-n)^{\text{ten}}$ Grade auf den Grad $(n^2-n)^2-(n^2-n)$ steigt. Es müssen also die Curven vom $(n^2-n)^{\text{ten}}$ Grade, welche Polarcurven einer Curve vom n^{ten} Grade sind, von so besonderer Natur sein, dafs sich der Grad ihrer Polarcurve immer um

$$(n^2-n)^2-(n^2-n)-n = n^3(n-2)$$

verringert.

Herr *Poncelet* erkannte die Quelle einer so grofsen Verringerung des Grades, welche die Polarcurve von (B) erfährt, in den *Doppeltangenten* und *Wendepuncten* der Curve (A). Jeder Doppeltangente von (A) entspricht ein *Doppelpunct*, jedem Wendepunct von A ein *Rückkehrpunct* in (B). Jeder Doppelpunct einer Curve bewirkt eine Reduction des Grades ihrer Polarcurve um *zwei* Einheiten, jeder Rückkehrpunct einer Curve bewirkt eine Reduction des Grades ihrer Polarcurve um *drei* Einheiten. Wenn also die Curven n^{ter} Ordnung (A) im Allgemeinen α *Doppeltangenten* und β *Wendepuncte* haben, so werden auch ihre Polarcurven (B) im Allgemeinen α *Doppelpuncte* und β *Rückkehrpuncte* haben und daher die Polarcurven der Curven (B) im Allgemeinen eine Verringerung ihres Grades um $2\alpha+3\beta$ Einheiten erfahren. Es wird nun darauf ankommen, zu beweisen, dafs im Allgemeinen

$$2\alpha+3\beta = n^3(n-2),$$

welches, wie man gesehen hat, die Zahl ist, um welche sich im Allgemeinen der Grad der Polarcurve von (B) verringert.

Da mehrere particuläre Sätze auf die Vermuthung führten, dafs die Curven n^{ten} Grades im Allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepuncte haben, so hat

Herr Professor ***Plücker*** im 12ten Bande dieses Journals die vorstehende Gleichung durch die Annahme der Werthe

$$\alpha = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$
$$\beta = 3n(n-2)$$

erfüllt, auch später die allgemeine Richtigkeit des für β angenommnen Werthes, so wie die Richtigkeit des Werthes von α für $n=4$ bewiesen. Ich werde im Folgenden den noch fehlenden Beweis der allgemeinen Gültigkeit des Werthes von α hinzufügen, oder zeigen, ***dafs die Curven n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten haben.***

Dieser Beweis, wie er hier geleistet werden soll, erfordert einige Hülfssätze, die sich theils auf die Grad-Erniedrigung beziehen, welche bisweilen eine rationale ganze Function mehrerer Variabeln vermittelst einer zwischen denselben Gröfsen gegebnen Gleichung erleiden kann, theils auf die Natur der Bedingungsgleichung, die zwischen den Coëfficienten einer gegebenen Gleichung Statt finden mufs, damit dieselbe zwei gleiche Wurzeln habe. Obgleich diese Sätze bekannt sind, so werde ich deren Beweise hier nicht übergehen, damit man nirgends eine Dunkelheit findet und alle zu dieser Untersuchung gehörigen Betrachtungen desto leichter übersehen kann. Nach Vorausschickung dieser Sätze wird die vorgelegte Aufgabe, die Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten einer Curve $n$ten Grades, durch eine einfache Transformation erledigt werden können.

Satz 1.

Wenn $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ rationale ganze Functionen von x und y sind, und der Grad von $y^\lambda\varphi(x,y)$ vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ um ε Einheiten erniedrigt werden kann, so wird auch der Grad von $\varphi(x,y)$ selbst vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ um ε Einheiten erniedrigt werden können, vorausgesetzt, dafs die Glieder der höchsten Dimensionen in $f(x,y)$ nicht sämmtlich durch y theilbar sind.

Beweis.

Eine rationale ganze Function von x und y, $\psi(x,y)$, kann vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$, wenn sie anders eine rationale ganze Function von x und y bleiben soll, keine andere Änderung erleiden, als die durch Hinzufügung des Productes von $f(x,y)$ in eine beliebige rationale ganze Function von x und y entsteht. Es werden also alle rationale ganze Functionen von x und y, welche vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ der

Function $\psi(x, y)$ äquivalent sind, in der Form

$$\psi(x, y) + \lambda f(x, y)$$

enthalten sein, wo λ eine beliebige rationale ganze Function von x und y bedeutet. Soll es möglich sein, dafs dieser transformirte Ausdruck einen niedrigern Grad als $\psi(x, y)$ selber erhält, so müssen mehrere Bedingungen Statt finden, welche man folgendermafsen erhält.

Zuvörderst bemerke ich, dafs der Grad von λ dadurch bestimmt ist, dafs λf genau von demselben Grade wie ψ sein mufs. Denn wäre λf von einem höhern Grade als ψ, so würde auch $\lambda f + \psi$ von einem höhern Grade als ψ sein, während es von einem niedrigeren Grade werden soll, und wenn λf von einem niedrigern Grade als ψ ist, so wird $\psi + \lambda f$ von demselben Grade wie ψ, da alsdann die Glieder der höchsten Dimension in ψ durch das Hinzufügen von λf nicht zerstört werden können.

Bedeutet U eine rationale ganze Function zweier oder mehrerer Variabeln vom p^{ten} Grade, so will ich mit U_i das Aggregat derjenigen Glieder von U bezeichnen, welche in Bezug auf diese Variabeln homogen und von der $(p-i)^{\text{ten}}$ Dimension sind. Es wird demnach U, nach den abnehmenden Dimensionen seiner Glieder geordnet,

$$U_0 + U_1 + U_2 + \text{etc.} = U,$$

und wenn man die identische Gleichung $U = V$ hat, so wird man auch die identische Gleichung $U_i = V_i$ haben.

Man setze in dieser Weise

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \text{etc.} \\ f &= f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.} \\ \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

und wenn man $\psi + \lambda f$ mit v bezeichnet,

$$\begin{aligned} \psi + \lambda f = v &= v_0 + v_1 + v_2 + \text{etc.} \\ &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \text{etc.} \\ &+ \{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \text{etc.}\}\{f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.}\}. \end{aligned}$$

Wenn λf und ψ von demselben Grade sind, so erhält man durch Vergleichung der Glieder derselben Dimension,

$$\begin{aligned} v_0 &= \psi_0 + \lambda_0 f_0 \\ v_1 &= \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0 \\ v_2 &= \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0 \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn sich in $\psi + \lambda f$ oder v alle den s höchsten Dimensionen angehörigen

Glieder gegenseitig zerstören, so verschwinden v_0, v_1, .. $v_{\varepsilon-1}$, oder es müssen die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
0 &= \psi_0 + \lambda_0 f_0 \\
0 &= \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0 \\
0 &= \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \psi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots + \lambda_{\varepsilon-1} f_0,
\end{aligned}$$

identisch erfüllt werden. Die *erste* dieser Gleichungen zeigt, dafs ψ_0 durch f_0 theilbar sein mufs und man für $-\lambda_0$ den Quotienten der Division zu nehmen hat; die *zweite* Gleichung zeigt, dafs auch $\psi_1 + \lambda_0 f_1$ durch f_0 theilbar sein mufs und man für $-\lambda_1$ den Quotienten dieser Division zu nehmen hat; die *dritte* Gleichung zeigt, dafs auch $\psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1$ durch f_0 theilbar sein und für $-\lambda_2$ der Quotient dieser Division genommen werden mufs, und so fort. Man erhält auf diese Weise nach und nach ε homogene Functionen, welche alle durch dieselbe homogene Function f_0 ohne Rest theilbar sein müssen, wenn es möglich sein soll, den Grad von ψ mittelst der Gleichung $f = 0$ um ε Einheiten zu erniedrigen, und es werden die Quotienten der verschiednen Divisionen die Ausdrücke, welche man für $-\lambda_0$, $-\lambda_1$, .. $-\lambda_{\varepsilon-1}$ zu nehmen hat. Umgekehrt sieht man, dafs wenn die angegebnen Bedingungen erfüllt sind, man immer einen rationalen ganzen Factor λ von der Art finden kann, dafs in ψ durch Hinzufügung von λf die Glieder der ε höchsten Dimensionen zerstört werden. Es wird nämlich, wenn man auf die angegebene Art die homogenen Functionen λ_0, λ_1, .. $\lambda_{\varepsilon-1}$ bestimmt hat,

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{\varepsilon-1} + \lambda_\varepsilon + \lambda_{\varepsilon+1} + \text{etc.},$$

wo für λ_ε, $\lambda_{\varepsilon+1}$, etc. *beliebige* rationale ganze homogene Functionen angenommen werden können, welche die ε höchsten Dimensionen in λ nicht erreichen.

Es sei jetzt die Function $\psi(x, y)$ durch y^k theilbar, so dafs, wenn man

$$\psi(x, y) = y^k \varphi(x, y)$$

setzt, $\varphi(x, y)$ ebenfalls eine rationale ganze Function von x und y wird. Es sei wieder $\varphi(x, y)$, nach den absteigenden Dimensionen seiner Glieder geordnet,

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \text{etc.} = \varphi(x, y),$$

so wird

$$\psi_0 = y^k \varphi_0, \quad \psi_1 = y^k \varphi_1, \quad \psi_2 = y^k \varphi_2, \quad \text{etc.}$$

Für diesen Fall, in welchem sämmtliche Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{\varepsilon-1}$, welche in die obigen Gleichungen eingehen, durch y^k theilbar sind, kann man beweisen, dafs, wenn f_0 nicht durch y theilbar ist, auch die sämmtlichen homogenen Functionen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{\varepsilon-1}$ durch y^k theilbar sein müssen.

Man braucht hierzu den Satz, dafs wenn eine rationale ganze Function A das Product zweier andern rationalen ganzen Functionen B und C ist, jede rationale ganze Function, welche A theilt und mit B keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, den andern Factor C theilen mufs. Dieser Satz ergiebt sich für den hier vorkommenden Fall homogener Functionen zweier Variablen, wenn man bedenkt, dafs sich dieselben immer nur auf *eine* Art in lineäre Factoren zerfällen lassen, und ebenso auch für Functionen von beliebig vielen Variabeln, wenn man dieselben als Functionen von jeder der Variabeln besonders betrachtet. Wendet man denselben auf die Gleichungen,

$$\begin{aligned}
0 &= y^k\varphi_0 + \lambda_0 f_0 \\
0 &= y^k\varphi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0 \\
0 &= y^k\varphi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= y^k\varphi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \cdots + \lambda_{\varepsilon-1} f_0
\end{aligned}$$

an, welche man aus den obigen durch die Substitution von $y^k\varphi_i$ für ψ_i erhält, so folgt, wenn f_0 nicht durch y theilbar ist, aus der ersten Gleichung, dafs λ_0 den Factor y^k hat, sodann aus der zweiten, dafs auch λ_1, hierauf aus der dritten, dafs λ_2, und schliefslich, dafs alle Functionen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{\varepsilon-1}$ den Factor y^k haben. Man kann daher

$$\lambda_0 = y^k\mu_0, \quad \lambda_1 = y_k\mu_1, \quad \ldots \quad \lambda_{\varepsilon-1} = y^k\mu_{\varepsilon-1}$$

setzen, wo $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{\varepsilon-1}$ rationale ganze Functionen von x und y sind. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorstehenden Gleichungen giebt nach Division mit y^k:

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi_0 + \mu_0 f_0 \\
0 &= \varphi_1 + \mu_0 f_1 + \mu_1 f_0 \\
0 &= \varphi_2 + \mu_0 f_2 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \varphi_{\varepsilon-1} + \mu_0 f_{\varepsilon-1} + \mu_1 f_{\varepsilon-2} + \cdots + \mu_{\varepsilon-1} f_0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs sich in dem Ausdrucke

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \text{etc.} \\
&+ \{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\varepsilon-1}\}\{f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.}\}
\end{aligned}$$

sämmtliche Glieder der ε höchsten Dimensionen gegenseitig zerstören, oder dafs der Grad von

$$\varphi + (\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{\varepsilon-1})f$$

um ε Einheiten niedriger als der Grad von φ ist. Wenn daher der Grad von $y^k\varphi$ vermittelst einer Gleichung vom n^{ten} Grade, $f = 0$, in welcher das Glied x^n nicht fehlt, um ε Einheiten verringert werden kann, so kann auch der Grad von φ selbst vermittelst dieser Gleichung um ε Einheiten verringert werden.

Man sieht ohne Schwierigkeit, dafs man für y^k jede beliebige homogene Function nehmen kann, welche keinen Theiler mit f_0 gemein hat.

Satz 2.

Es sei h die Wurzel einer Gleichung m^{ten} Grades,

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m,$$

deren Coëfficienten rationale ganze Functionen von x und y sind, und B_0, B_1, B_2, .. B_m respective der Grad dieser Functionen; wenn diese Zahlen eine arithmetische Reihe bilden, so steigt die Bedingungsgleichung, welche erforderlich ist, damit die vorgelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, auf den Grad

$$(m-1)(B_0 + B_m).$$

Beweis.

Es seien

$$h_1,\ h_2,\ \ldots\ h_m$$

die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so mufs, damit zwei dieser Wurzeln gleich werden, die Bedingungsgleichung

$$\Pi(h_i - h_k)^2 = 0$$

Statt finden, wenn man mit $\Pi(h_i - h_k)^2$ das Quadrat des aus den Differenzen der Wurzeln gebildeten Products bezeichnet. Diese rationale ganze symmetrische Function der Wurzeln kann durch eine rationale ganze Function der Gröfsen

$$\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m},\ \frac{\alpha_{m-2}}{\alpha_m},\ \ldots\ \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$$

ausgedrückt werden. Bedeutet α_m^p die höchste Potenz von α_m, durch welche die Glieder dieses Ausdrucks dividirt werden, so erhält man durch Multipli-

cation mit α_m^p eine rationale ganze homogene Function der Coëfficienten α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ vom p^{ten} Grade, welche ich mit

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = \alpha_m^p \Pi(h_i - h_k)^2$$

bezeichnen will. Diese Function kann durch keine der Gröfsen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ theilbar sein, weil das Verschwinden keines der Coëfficienten der gegebenen Gleichung die Gleichheit zweier ihrer Wurzeln nothwendig mit sich führt. Es kommt nun vor allem darauf an, den Werth von p oder die Dimension dieser homogenen Function zu finden.

Zu diesem Zweck betrachte man die reciproke Gleichung,

$$\alpha_m + \alpha_{m-1} g + \alpha_{m-2} g^2 + \ldots + \alpha_0 g^m = 0,$$

welche man aus der gegebnen erhält, wenn man darin $h = \frac{1}{g}$ setzt und mit g^m multiplicirt. Setzt man

$$g_i = \frac{1}{h_i},$$

so werden $g_1, g_2, \ldots g_m$ die Wurzeln dieser reciproken Gleichung, und daher

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0) = \alpha_0^p \Pi(g_i - g_k)^2 = \alpha_0^p \Pi \frac{(h_i - h_k)^2}{h_i^2 h_k^2}.$$

Da das Product Π unter dem Zeichen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Factoren umfafst, so besteht der Nenner aus dem Product von $2m(m-1)$ Wurzeln h_i, und da derselbe eine symmetrische Function dieser Wurzeln ist, so mufs er der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Potenz des Productes aus den m Wurzeln $h_1, h_2, \ldots h_m$ und daher der Gröfse

$$\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_m}\right)^{2m-2}$$

gleich sein. Man hat daher

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0) = \alpha_0^{p-2m+2} \alpha_m^{2m-2} \Pi(h_i - h_k)^2$$

oder

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0) = \frac{\alpha_0^{p-2m+2}}{\alpha_m^{p-2m+2}} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m).$$

Da beide Ausdrücke, $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ und $\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0)$, rationale ganze Functionen von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sind und, wie oben bemerkt worden ist, keine dieser Gröfsen zum Factor haben können, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dafs die Zahl $p - 2m + 2$ weder positiv noch negativ sein kann, und also verschwinden mufs. Man hat demnach

$$p = 2m - 2,$$

und also

$$(1.) \qquad \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = \alpha_m^{2m-2} \Pi(h_i - h_k)^2.$$

Wenn man daher die Bedingung, dafs eine Gleichung

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m$$

zwei gleiche Wurzeln habe, mit

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = 0$$

bezeichnet, wo Δ eine, von allen überflüssigen Factoren freie, rationale ganze Function von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sein soll, so ist diese Function in Bezug auf diese Gröfsen homogen und von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Dimension.

Wenn im Folgenden für eine gegebene Gleichung m^{ten} Grades, $F(h) = 0$, die Bedingungsgleichung, $\Delta = 0$, aufgestellt werden soll, welche zwischen ihren Coëfficienten Statt finden mufs, damit zwei ihrer Wurzeln gleich werden, so wird man unter Δ immer die durch die Formel (1.) definirte Function verstehen, nämlich *eine rationale ganze Function der Coëfficienten von $F(h)$ von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Dimension, welche gleich ist der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Potenz des Coëfficienten von h^m in $F(h)$ mal dem Quadrate des Productes aus den Differenzen der Wurzeln der Gleichung $F(h) = 0$.* Aus dem Vorhergehenden erhellt, dafs diese Function unverändert bleibt, wenn man ihre Argumente in umgekehrter Ordnung schreibt, da sich die oben gefundene Gleichung, wenn man für p seinen Werth $2m-2$ setzt, in

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = \Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0)$$

verwandelt.

Es seien jetzt $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ Functionen von einer oder mehreren Variabeln, z. B. von den Variabeln x und y, und respective

$$B_0, B_1, \ldots B_m$$

die Zahlen, welche ihren Grad bezeichnen, so wird im Allgemeinen der Grad, auf welchen die Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ in Bezug auf x und y steigt, gleich dem Grade, auf welchen der Ausdruck

$$\Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m})$$

in Bezug auf t steigt.

Wenn die Zahlen B_0, B_1, etc. eine arithmetische Reihe mit der Differenz C bilden, so dafs

$$B_i = B_0 + iC,$$

so hat man, da Δ eine homogene Function von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ von der $(2m-2)^{\text{ten}}$

Dimension ist,

$$\Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m}) = t^{(2m-2)B_0}\Delta(\alpha_0, \alpha_1 t^C, \alpha_2 t^{2C}, \ldots \alpha_m t^{mC}).$$

Da $h_1, h_2, \ldots h_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m$$

sind, so werden

$$h_1 t^{-C}, h_2 t^{-C}, \ldots h_m t^{-C}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 t^C h + \alpha_2 t^{2C} h^2 + \cdots \alpha_m t^{mC} h^m$$

und daher zufolge (1.)

$$\begin{aligned}&\Delta(\alpha_0, \alpha_1 t^C, \alpha_2 t^{2C}, \ldots \alpha_m t^{mC})\\ &= \alpha_m^{2m-2} t^{m(2m-2)C} \Pi(h_i t^{-C} - h_k t^{-C})^2,\end{aligned}$$

woraus

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1 t^C, \alpha_2 t^{2C}, \ldots \alpha_m t^{mC}) = t^{m(m-1)C}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m),$$

$$\Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m}) = t^{(m-1)(2B_0+mC)}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$$

folgt, oder, da $2B_0 + mC = B_0 + B_m$ ist,

$$(2.)\quad \Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m}) = t^{(m-1)(B_0+B_m)}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m).$$

Da $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ die Gröfse t gar nicht enthält, so wird dieser Ausdruck in Bezug auf t von der Ordnung $(m-1)(B_0+B_m)$, und daher auch $(m-1)(B_0+B_m)$ der Grad der Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ in Bezug auf x und y, w. z. b. w.

Da $\frac{1}{2}(m+1)(B_0+B_m)$ die Summe der Zahlen $B_0, B_1, \ldots B_m$ ist, so kann man auch sagen, dafs der Grad der Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ das $\frac{2m-2}{m+1}$fache des Grades ist, auf welchen das Product aus allen Coëfficienten steigt.

Satz 3.

Wenn man eine gegebne Gleichung m^{ten} Grades,

$$0 = F(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m,$$

durch die Substitution $h = \frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}$ *in die Gleichung*

$$0 = (\gamma + \delta g)^m F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right) = \beta_0 + \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \cdots \beta_m g^m$$

transformirt, so erleidet hiedurch die Bedingungsgleichung $\Delta = 0$, welche zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichung Statt finden mufs, damit zwei ihrer Wurzeln gleich werden, keine weitere

Veränderung, als dafs der Ausdruck Δ links vom Gleichheitszeichen mit $(\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m^2-m}$ multiplicirt wird, oder es wird

$$\Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots\ \beta_m) = (\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m^2-m}\Delta(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_m).$$

Beweis.

Es sei

$$h_i = \frac{\gamma'+\delta' g_i}{\gamma+\delta g_i} \quad \text{oder} \quad g_i = \frac{\gamma'-\gamma h_i}{\delta h_i-\delta'},$$

so werden die Gröfsen $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_m$ die Wurzeln der transformirten Gleichung

$$0 = (\gamma+\delta g)^m F\Big(\frac{\gamma'+\delta' g}{\gamma+\delta g}\Big)$$
$$= \beta_0+\beta_1 g+\beta_2 g^2+\ \ldots\ +\beta_m g^m,$$

und daher zufolge der Formel (1.),

$$\Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots\ \beta_m) = \beta_m^{2m-2}\Pi(g_i-g_k)^2.$$

Der Werth von β_m ist hier

$$\delta^m F\Big(\frac{\delta'}{\delta}\Big) = \beta_m,$$

wie man sogleich sieht, wenn man in der Formel, welche die transformirte Gleichung gab, $g=\infty$ setzt.

Es ist ferner

$$g_i-g_k = \frac{\gamma'-\gamma h_i}{\delta h_i-\delta'}-\frac{\gamma'-\gamma h_k}{\delta h_k-\delta'}$$
$$= \frac{(\gamma\delta'-\gamma'\delta)(h_i-h_k)}{(\delta'-\delta h_i)(\delta'-\delta h_k)}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in das Product $\Pi(g_i-g_k)^2$, welches aus $m(m-1)$ Factoren g_i-g_k besteht, so erhält man im Nenner ein Product aus $2m(m-1)$ Factoren $\delta'-\delta h_i$, und da dasselbe eine symmetrische Function der m Wurzeln h_i sein mufs, so wird dieser Nenner

$$\{(\delta'-\delta h_1)(\delta'-\delta h_2)\ \ldots\ (\delta'-\delta h_m)\}^{2m-2}.$$

Es ist aber

$$F(h) = \alpha_m(h-h_1)(h-h_2)\ \ldots\ (h-h_m)$$

und daher

$$(\delta'-\delta h_1)(\delta'-\delta h_2)\ \ldots\ (\delta'-\delta h_m)$$
$$= \delta^m\Big(\frac{\delta'}{\delta}-h_1\Big)\Big(\frac{\delta'}{\delta}-h_2\Big)\cdots\Big(\frac{\delta'}{\delta}-h_m\Big) = \frac{\delta^m}{\alpha_m}F\Big(\frac{\delta'}{\delta}\Big) = \frac{\beta_m}{\alpha_m}.$$

Man erhält demnach

$$\Pi(g_i-g_k)^2 = (\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m(m-1)}\Pi\frac{(h_i-h_k)^2}{(\delta'-\delta h_i)^2(\delta'-\delta h_k)^2}$$
$$= (\gamma\delta'-\gamma\delta)^{m(m-1)}\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)^{2m-2}\Pi(h_i-h_k)^2,$$

und daher

$$\Delta(\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_m) = \beta_m^{2m-2}\Pi(g_i-g_k)^2$$
$$= (\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m^2-m}\alpha_m^{2m-2}\Pi(h_i-h_k)^2 = (\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m^2-m}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m);$$

was zu beweisen war.

Aus dem im Vorhergehenden bewiesenen Satze folgt das Corollar, dafs, wenn die Determinante der beiden lineären Ausdrücke, $\gamma+\delta g$, $\gamma'+\delta' g$, oder die Gröfse $\gamma\delta'-\gamma'\delta$, der Einheit gleich ist, die Function $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ dadurch, dafs man darin $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_m$ für $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ setzt, unverändert bleibt.

Nach diesen Vorbereitungen komme ich jetzt zu der vorgelegten Aufgabe selbst.

Aufgabe.

Die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung zu finden.

Auflösung.

Es sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer gegebnen Curve n^{ter} Ordnung. Man multiplicire die Glieder des Ausdrucks $f(x, y)$, welche nicht auf den n^{ten} Grad steigen, mit einer solchen Potenz von z, dafs sie alle in Bezug auf x, y, z von der n^{ten} Dimension werden, und bezeichne die homogene Function von x, y, z von der n^{ten} Dimension, welche man auf diese Weise erhält, mit $f(x, y, z)$. Es wird demnach, wenn man auf die in dem Satze (1.) angegebne Art die Function f, nach fallenden Dimensionen geordnet, mit

$$f_0+f_1+f_2+\ldots f_n = f$$

bezeichnet, der Ausdruck

$$f(x, y, z) = f_0+f_1 z+f_2 z^2+\ldots+f_n z^n$$

werden. Es soll im Folgenden der Gleichung der Curve die Form,

$$f(x, y, z) = 0,$$

gegeben werden, wobei man sich unter z eine beliebige Constante oder, wenn man will, die *Einheit* zu denken hat. Die Formeln der analytischen Geometrie haben durch diese Einführung der homogenen Function $f(x, y, z)$ von 3 Variabeln x, y, z statt der nicht homogenen Function $f(x, y)$ wesentlich an Ein-

facheit und Symmetrie gewonnen und es würden ohne dieselbe mehrere der wichtigsten Untersuchungen nicht ohne die beschwerlichste Weitläuftigkeit zu führen sein. Die nachfolgenden Untersuchungen werden auf's neue den Nutzen dieses wichtigen Hülfsmittels darthun.

Es seien x und y die Coordinaten eines Punctes der gegebnen Curve, und in diesem Puncte an die Curve eine Tangente gelegt.

Nennt man p und q die Coordinaten der Puncte dieser Tangente, so kann man vermöge der Gleichung derselben,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(q-y) = 0,$$

die beiden Coordinaten p und q durch eine einzige Gröfse h ausdrücken, indem man

$$p = x+\frac{\partial f}{\partial y}h$$
$$q = y-\frac{\partial f}{\partial x}h$$

setzt. Giebt man in diesen Ausdrücken der Gröfse h alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die Coordinaten aller verschiednen Puncte der Tangente. Da jede gerade Linie die gegebene Curve in n (reellen oder imaginären) Puncten schneidet, so wird die Tangente die gegebene Curve aufser den beiden im *Berührungspuncte* zusammenfallenden Puncten noch in $n-2$ andern Puncten *schneiden*. Für alle Puncte, welche die Tangente mit der Curve gemein hat, mufs die Gleichung

$$f(p,\, q,\, z) = f\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}h,\; y-\frac{\partial f}{\partial x}h,\; z\right) = 0$$

Statt finden. Man setze der Kürze halber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = b,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = c,$$

und

$$f(x+bh;\; y-ah,\; z) = u_2h^2+u_3h^3+\cdots+u_nh^n,$$

indem die ersten beiden Glieder wegen der Gleichungen

$$f(x,\, y,\, z) = 0,\qquad b\frac{\partial f}{\partial x}-a\frac{df}{\partial y} = 0$$

verschwinden. Die Gleichung, deren Wurzeln die $n-2$ Werthe von h sind, welche die $n-2$ *Schneidungspuncte* der Tangente mit der Curve geben, wird hienach,

$$(3.)\qquad 0 = \frac{1}{h^2}f(x+bh,\; y-ah,\; z)$$
$$= u_2+u_3h+u_4h^2+\cdots+u_nh^{n-2},$$

indem man durch die Division mit h^2 die Gleichung von den beiden zusammenfallenden Wurzeln $h = 0$, welche dem Berührungspuncte entsprechen, befreit hat.

Wenn zwei von diesen $n-2$ Wurzeln einander gleich werden, so fallen zwei von den $n-2$ Schneidungspuncten in einen einzigen zusammen, oder es hat in diesem Puncte die Tangente mit der Curve noch zum zweiten Male eine Berührung. Bezeichnet man daher die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Coëfficienten $u_2, u_3, \ldots u_n$ Statt finden mufs, damit die vorstehende Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, wieder, wie oben, mit

$$\varDelta(u_2, u_3, \ldots u_n) = 0,$$

so wird dies die Gleichung, welche zwischen den Gröfsen x und y noch aufser der Gleichung der gegebnen Curve, $f(x, y, z) = 0$, Statt finden mufs, damit die in dem Puncte, dessen Coordinaten x und y sind, an die gegebne Curve gelegte Tangente, eine *Doppeltangente* werde.

Wenn man in dem zweiten Theile der Gleichung (3.) yh für h setzt, so kann man den hiedurch erhaltenen Ausdruck auf eine merkwürdige Art umformen, was sogleich zur Erledigung der vorgelegten Aufgabe führt.

Vermöge einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen hat man

$$xa + yb + zc = nf = 0.$$

Wenn man aus dieser Gleichung für yb seinen Werth $-xa-zc$ entnimmt, und zugleich der Kürze halber

$$1 - ah = A$$

setzt, so erhält man nach und nach,

$$(4.)\quad \begin{cases} y^2u_2 + y^3u_3h + y^4u_4h^2 + \ldots + y^nu_nh^{n-2} \\ = \frac{1}{h^2}f(x+ybh,\; y-yah,\; z) \\ = \frac{1}{h^2}f(x-xah-zch,\; y-yah,\; z) \\ = \frac{1}{h^2}f(xA-zch,\; yA,\; zA+zah) \\ = \frac{A^n}{h^2}f\left(x-\frac{zch}{A},\; y,\; z+\frac{zah}{A}\right). \end{cases}$$

Es sei

$$(5.)\quad f(x-ch,\; y,\; z+ah) = v_2h^2 + v_3h^3 + \ldots + v_nh^n,$$

so wird, wenn man $\frac{zh}{A}$ für h setzt,

$$f\left(x-\frac{zch}{A},\ y,\ z+\frac{zah}{A}\right) = \frac{z^2 v_2 h^2}{A^2}+\frac{z^3 v_3 h^3}{A^3}+\ldots+\frac{z^n v_n h^n}{A^n},$$

und daher zufolge (4.),

$$(6.)\quad y^2 u_2+y^3 u_3 h+y^4 u_4 h^2+\ldots+y^n u_n h^{n-2}$$
$$= z^2 v_2 A^{n-2}+z^3 v_3 A^{n-3} h+z^4 v_4 A^{n-4} h^2+\ldots+z^n v_n h^{n-2}.$$

Es sei der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, wenn man für A seinen Werth $1-ah$ setzt, und nach den Potenzen von h entwickelt,

$$(7.)\quad z^2\beta_2+z^2\beta_3 h+z^2\beta_4 h^2+\cdots+z^2\beta_n h^{n-2}$$
$$= z^2 v_2 A^{n-2}+z^3 v_3 A^{n-3} h+z^4 v_4 A^{n-4} h^2+\cdots+z^n v_n h^{n-2},$$

so wird

$$(8.)\quad y^2 u_2+y^3 u_3 h+y^4 u_4 h^2+\cdots+y^n u_n h^{n-2}$$
$$= z^2\beta_2+z^2\beta_3 h+z^2\beta_4 h^2+\cdots+z^2\beta_n h^{n-2},$$

und daher

$$(9.)\quad y^2 u_2 = z^2\beta_2,\quad y^3 u_3 = z^2\beta_3,\quad \ldots\quad y^n u_n = z^2\beta_n.$$

Diese Gleichungen geben zuvörderst eine vermittelst der Gleichung der Curve, $f=0$, bewerkstelligte Transformation der Coëfficienten $y^i u_i$.

Wenn man in der oben gebrauchten identischen Gleichung (2).

$$\Delta(\alpha_0 t^{B_0},\ \alpha_1 t^{B_1},\ \ldots\ \alpha_m t^{B_m}) = t^{(m-1)(B_0+B_m)}\Delta(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_m),$$

für die Gröfsen α_i, t, m, B_0, B_m respective u_{i+2}, y, $n-2$, 2, n schreibt, so erhält man die identische Gleichung,

$$\Delta(y^2 u_2,\ y^3 u_3,\ \ldots\ y^n u_n) = y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n).$$

Die Gleichungen (9.) geben ferner

$$\Delta(y^2 u_2,\ y^3 u_3,\ \ldots\ y^n u_n) = \Delta(z^2\beta_2,\ z^2\beta_3,\ \ldots\ z^2\beta_n),$$

woraus

$$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots u_n) = \Delta(z^2\beta_2,\ z^2\beta_3,\ \ldots\ z^2\beta_n)$$

folgt.

Bemerkt man, dafs die Determinante der beiden linearen Functionen von h, $A=1-ah$ und h, die *Einheit* ist, so folgt aus (7.) nach dem Satze 3. die identische Gleichung,

$$\Delta(z^2\beta_2,\ z^2\beta_3,\ \ldots\ z^2\beta_n) = \Delta(z^2 v_2,\ z^3 v_3,\ \ldots\ z^n v_n),$$

und daher

$$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots u_n) = \Delta(z^2 v_2,\ z^3 v_3,\ \ldots\ z^n v_n),$$

oder endlich, da man auch die identische Gleichung

$$\Delta(z^2 v_2,\ z^3 v_3,\ \ldots\ z^n v_n) = z^{(n-3)(n+2)} \Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n)$$

hat,

$$(10.)\quad y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n) = z^{(n-3)(n+2)} \Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n).$$

Da die Gröfsen a, b, c homogene Functionen von x, y, z von derselben, der $(n-1)^{\text{ten}}$, Ordnung sind, so werden die Coëfficienten von h^i in der Entwicklung der Ausdrücke

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{1}{h^2} f(x+bh,\ y-ah,\ z) = u_2 + u_3 h + u_4 h^2 + \cdots + u_n h^{n-2}, \\ \frac{1}{h^2} f(x-ch,\ y,\ z+ah) = v_2 + v_3 h + v_4 h^2 + \cdots + v_n h^{n-2}, \end{cases}$$

oder die Gröfsen u_{i+2} und v_{i+2}, und daher auch die beiden Seiten der Gleichung (10.) homogene Functionen von x, y, z von derselben Ordnung. Denn sie werden aus homogenen Functionen derselben Ordnung auf ähnliche Art gebildet. Dies ergiebt sich auch daraus, dafs die Transformation, durch welche die Gleichungen (9.) und die Gleichung (10.) erhalten werden, darin besteht, dafs man für die homogene Function yb eine andere homogene Function derselben Ordnung, $-(xa+zc)$, setzt, wodurch eine homogene Function von x, y, z nicht aufhört homogen zu sein und von derselben Ordnung bleibt.

Wenn man $z=1$ setzt, so ersieht man aus (10.), dafs die Function

$$y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n)$$

mittelst der gegebnen Gleichung $f=0$ in die Function $\Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n)$ verwandelt werden kann. Es kann daher zufolge des Satzes (1.) auch die Function $\Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n)$ selber in eine andere Δ' verwandelt werden, deren Grad um $(n-3)(n+2)$ Einheiten niedriger ist als der Grad von $\Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n)$.

Die Anwendung des Satzes 1. setzt voraus, dafs die Glieder der höchsten Dimension in f nicht sämmtlich durch y theilbar seien, oder dafs unter ihnen das Glied x^n nicht fehle. Dies kann aber immer durch eine blofse Änderung der Coordinaten-Achsen bewirkt werden.

Bezeichnet man den Grad von v_{i+2} mit B_i, so zeigt die zweite der Gleichungen (11.), dafs die Zahlen B_0, B_1, .. B_{n-2} eine arithmetische Reihe mit der Differenz $n-2$ bilden, deren erstes und letztes Glied,

$$B_0 = n-2+2(n-1) = 3n-4, \quad B_{n-2} = n(n-1)$$

wird. Substituirt man diese Werthe in die Formel des Satzes 2., indem man

zugleich $m = n-2$ setzt, so folgt aus diesem Satze, dafs der Ausdruck $\varDelta(v_2, v_3, \ldots v_n)$ vom Grade

$$(n-3)(B_0 + B_{n-2}) = (n-3)(n^2+2n-4)$$

ist. Es wird daher $\varDelta'$ vom Grade

$$(n-3)(n^2+2n-4)-(n-3)(n+2) = (n-3)(n^2+n-6)$$
$$= (n-3)(n+3)(n-2) = (n-2)(n^2-9),$$

oder es kann die Function $\varDelta(u_2, u_3, \ldots u_n)$ mittelst der Gleichung $f=0$ in eine andere $\varDelta'$ verwandelt werden, welche nur auf den Grad $(n-2)(n^2-9)$ steigt. Es kann daher das System der beiden Gleichungen,

$$f=0, \quad \varDelta(u_2, u_3, \ldots u_n) = 0$$

durch das System der beiden Gleichungen $f=0$, $\varDelta'=0$, ersetzt werden, von denen die erstere vom Grade n, die letztere vom Grade $(n-2)(n^2-9)$ ist, und jedes System Werthe von x und y, welches das eine System Gleichungen erfüllt, wird auch das andere erfüllen.

Den Gleichungen $f=0$, $\varDelta'=0$ genügen im Allgemeinen $n(n-2)(n^2-9)$ Systeme Werthe von x und y. So viel Systeme von Werthen von x und y kann es daher auch nur geben, welche den Gleichungen $f=0$ und $\varDelta(u_2, u_3, \ldots u_n)=0$ genügen, oder der Gleichung $f=0$ genügen und in die Functionen $u_2, u_3, \ldots u_n$ substituirt, denselben solche Werthe geben, dafs die Gleichung

$$0 = u_2 + u_3 h + u_4 h^2 + \ldots + u_n h^{n-2}$$

zwei gleiche Wurzeln erhält. Diese Werthe von x und y sind aber die Coordinaten derjenigen Puncte der gegebnen Curve n^{ten} Grades $(f=0)$, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die in ihnen an diese Curve gelegten Tangenten dieselbe noch in einem andern Puncte berühren oder von ihr Doppeltangenten sind, d. h. es sind diese Werthe der Gröfsen x und y die Coordinaten der Berührungspuncte der Curve mit ihren Doppeltangenten. Es erhellt daher aus dem Vorstehenden, dafs diese Puncte die Durchschnittspuncte der gegebnen Curve n^{ten} Grades $(f=0)$ mit einer andern $(\varDelta'=0)$ sind, welche im Allgemeinen auf den Grad $(n-2)(n^2-9)$ steigt, und *dafs demnach im Allgemeinen die Anzahl der Berührungspuncte, welche eine Curve n^{ten} Grades mit ihren Doppeltangenten hat, $n(n-2)(n^2-9)$ beträgt.*

Von den sämmtlichen Berührungspuncten der Doppeltangenten gehören aber immer zwei der nämlichen Doppeltangente an, und es ist daher ihre halbe

Anzahl die Anzahl der Doppeltangenten. Es haben also die Curven $n$ten Grades im Allgemeinen

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

Doppeltangenten; was zu beweisen war.

Der vorstehende Beweis beruht ganz auf der merkwürdigen Gleichung (10.), welche ihrerseits wieder aus der Gleichung (4.),

$$f(x+ybh,\ y-yah,\ z) = (1-ah)^n f\left(x-\frac{zch}{1-ah},\ y,\ z+\frac{zah}{1-ah}\right)$$

abgeleitet worden ist. Setzt man

$$A = 1-ah,\ B = 1-bh,\ C = 1-ch$$
$$A' = 1+ah,\ B' = 1+bh,\ C' = 1+ch,$$

ferner

$$f(x,\ y+ch,\ z-bh) = \varphi(h)$$
$$f(x-ch,\ y,\ z+ah) = \varphi_1(h)$$
$$f(x+bh,\ y-ah,\ z) = \varphi_2(h),$$

so erhält man auf ganz ähnliche Art, wie (4.), die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \varphi_2(yh) = A^n\varphi_1\left(\frac{zh}{A}\right), & \varphi_1(zh) = A'^n\varphi_2\left(\frac{yh}{A'}\right) \\ \varphi(zh) = B^n\varphi_2\left(\frac{xh}{B}\right), & \varphi_2(xh) = B'^n\varphi\left(\frac{zh}{B'}\right) \\ \varphi_1(xh) = C^n\varphi\left(\frac{yz}{C}\right), & \varphi(yh) = C'^n\varphi_1\left(\frac{xh}{C}\right). \end{cases}$$

Aus der ersten der beiden in der ersten Horizontalreihe befindlichen Formeln ist die Gleichung (10.) hergeleitet worden; dieselbe hätte auch aus der zweiten Formel derselben Horizontalreihe gefunden werden können. Aus den in den beiden andern Horizontalreihen befindlichen Formeln leitet man zwei der Gleichung (10.) ähnliche Gleichungen ab, wobei es wieder gleichgültig ist, welche von den beiden in derselben Horizontalreihe befindlichen Formeln man hiezu anwendet. Die so gefundnen Resultate will ich im folgenden Theorem zusammenstellen:

Es werde mit $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ die rationale ganze und homogene Function der Gröfsen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung bezeichnet, welche, $=0$ gesetzt, die Bedingung giebt, dafs eine Gleichung

$$0 = \alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+ \ldots +\alpha_m h^m$$

zwei gleiche Wurzeln habe; es sei ferner $f(x, y, z)$ eine rationale ganze

und homogene Function der Gröfsen x, y, z von der n^{ten} Ordnung; endlich setze man

$$\varphi_2(h) = f\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}h,\ y-\frac{\partial f}{\partial x}h,\ z\right) = u_2h^2+u_3h^3+\ldots+u_nh^n$$

$$\varphi_1(h) = f\left(x-\frac{\partial f}{\partial z}h,\ y,\ z+\frac{\partial f}{\partial x}h\right) = v_2h^2+v_3h^3+\ldots+v_nh^n$$

$$\varphi(h) = f\left(x,\ y+\frac{\partial f}{\partial z}h,\ z-\frac{\partial f}{\partial y}h\right) = w_2h^2+w_3h^3+\ldots+w_nh^n,$$

$$\Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots u_n) = \Delta$$

$$\Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots v_n) = \Delta_1$$

$$\Delta(w_2,\ w_3,\ \ldots w_n) = \Delta_2,$$

wo Δ, Δ_1, Δ_2 homogene Functionen von x, y, z von der Ordnung $(n-3)(n^2+2n-4)$ sein werden, so folgen aus der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ die Proportionen,

$$(13.)\qquad \Delta:\Delta_1:\Delta_2 = z^{(n-3)(n+2)}:y^{(n-3)(n+2)}:x^{(n-3)(n+2)}.$$

Ich will jetzt an den vorstehenden Beweis noch einige andere Betrachtungen knüpfen, welche dazu geeignet sind, auf die hier angewandte Methode gröfseres Licht zu werfen.

Über die Anzahl der Wendepuncte.

Die vorstehende Untersuchung giebt auch die Anzahl der *Wendepuncte* einer Curve n^{ten} Grades. Wenn nämlich die Gleichung

$$0 = f\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}h,\ y-\frac{\partial f}{\partial x}h,\ z\right) = u_2h^2+u_3h^3+\ldots+u_nh^n,$$

welche zwei Wurzeln $h=0$ hat, noch eine dritte Wurzel $=0$ hat, welches die Bedingung $u_2 = 0$ erfordert, so entsprechen dieser dreifachen Wurzel *drei* zusammenfallende Durchschnittspuncte der Tangente und der Curve, oder es wird der Berührungspunct ein *Wendepunct*. Die Werthe von x und y, welche aufser der Gleichung $f=0$ noch die Gleichung $u_2=0$ erfüllen, sind daher die Coordinaten eines Wendepunctes der gegebnen Curve. *Der Grad der Function u_2 kann aber vermittelst der gegebnen Gleichung $f=0$ um zwei Einheiten verringert werden,* wie aus den obigen Formeln erhellt. Man erhält nämlich aus (6.), wenn man darin $h=0$, $A=1$ setzt, die Gleichung

$$y^2u_2 = z^2v_2.$$

In dieser Gleichung sind u_2 und v_2 rationale ganze homogene Functionen der

Gröfsen x, y, z von der Ordnung $n-2+2(n-1) = 3n-4$. Es wird daher, wenn man $z=1$ setzt, die Function $y^2 u_2$ einer Function v_2 gleich, welche in Bezug auf x und y von einem um 2 Einheiten niedrigeren Grade ist. Zufolge des Satzes 1. kann daher der Grad von u_2 ebenfalls um 2 Einheiten verringert oder u_2 auf eine Function u_2' vom Grade $3n-6$ gebracht werden. Die Wendepuncte der gegebnen Curve $(f=0)$ sind daher ihre Durchschnittspuncte mit einer Curve $(u_2'=0)$ vom Grade $3(n-2)$, und *es ist daher die Anzahl der Wendepuncte einer Curve n^{ten} Grades im Allgemeinen* $3n(n-2)$; welches die von Hrn. ***Plücker*** für diese Anzahl gefundne Formel ist.

Es zeigt aber die Formel (6.),

$$y^2u_2+y^3u_3h+y^4u_4h^2+\cdots+y^nu_nh^{n-2} = z^2v_2A^{n-2}+z^3v_3A^{n-3}h+\cdots+z^nv_nh^{n-2},$$

dafs sich auch alle übrigen Functionen u_3, u_4, .. u_n mittelst der Gleichung $f=0$ auf andere reduciren lassen, deren Grad um 2 Einheiten geringer ist. Substituirt man nämlich in dieser Formel für A seinen Werth $1-ah$ und setzt die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von h einander gleich, so erhält man allgemein $y^m u_m$ gleich einer homogenen Function von x, y, z von derselben Ordnung, welche aber den Factor z^2 enthält. In Bezug auf x und y wird daher der Grad dieser Function um 2 Einheiten niedriger als der Grad von $y^m u_m$, und man kann daher, dem Satz 1. zufolge, auch u_m selber auf eine Function von einem um 2 Einheiten niedrigeren Grade reduciren.

Man erhält aus der vorstehenden Gleichung die folgenden, welche dazu dienen können, die Gröfsen u_m durch die Gröfsen v_m auszudrücken:

$$\begin{aligned}
y^2u_2 &= z^2v_2 \\
y^3u &= z^3v_3-(n-2)z^2av_2 \\
y^4u_4 &= z^4v_4-(n-3)z^3av_3+\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}z^2a^2v_2 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und allgemein

$$\begin{aligned}
(14.)\quad y^mu_m = z^mv_m-(n-m+1)z^{m-1}av_{m-1}&+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}z^{m-2}a^2v_{m-2} \\
&-\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1.2.3}z^{m-3}a^3v_{m-3} \\
&+\cdots\cdots \\
&\pm\frac{(n-m+1)(n-m+2)..(n-2)}{1.2..(m-2)}z^2a^{m-2}v_2.
\end{aligned}$$

Die umgekehrten Formeln, mittelst welcher die Functionen v_m durch die Functionen u_m ausgedrückt werden, erhält man aus der Gleichung (12.),

$$\varphi_1(zh) = A'^n \varphi_2\left(\frac{yh}{A'}\right).$$

Zufolge dieser Gleichung erhält man nämlich aus den aus der Gleichung

$$\varphi_2(yh) = A^n \varphi_1\left(\frac{zh}{A}\right)$$

zwischen den Functionen u und v abgeleiteten Relationen die umgekehrten, wenn man die Functionen u_i und v_i und die Gröfsen y und z, so weit sie in diesen Relationen explicite vorkommen, mit einander vertauscht und gleichzeitig $-a$ für a setzt. Man kann ferner in den so erhaltenen Formeln für

$$x,\ a,\ w;\quad y,\ b,\ v;\quad z,\ c,\ u$$

respective

$$y,\ b,\ v;\quad z,\ c,\ u;\quad x,\ a,\ w$$

oder

$$z,\ c,\ u;\quad x,\ a,\ w;\quad y,\ b,\ v$$

setzen, wodurch man alle bezüglich aus den 6 Formeln (12.) folgenden Gleichungen erhält, welche die zu einem der Systeme der Coëfficienten u_m, v_m, w_m gehörenden Gröfsen durch die zu einem der beiden andern gehörenden Gröfsen ausdrücken. Man kann auf diese Weise aus (14.), wenn man der Kürze halber

$$M_i = \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+i)}{1\,.\,2\,.\,.\,i}$$

setzt, die folgenden 6 Gleichungen ableiten:

$$(15.)\begin{cases} y^m u_m = z^m v_m - M_1 z^{m-1} a v_{m-1} + M_2 z^{m-2} a^2 v_{m-2} \ldots \pm M_{m-2} z^2 a^{m-2} v_2 \\ z^m w_m = x^m u_m - M_1 x^{m-1} b u_{m-1} + M_2 x^{m-2} b^2 u_{m-2} \ldots \pm M_{m-2} x^2 b^{m-2} u_2 \\ x^m v_m = y^m w_m - M_1 y^{m-1} c w_{m-1} + M_2 y^{m-2} c^2 w_{m-2} \ldots \pm M_{m-2} y^2 c^{n-2} w_2 \\ z^m v_m = y^m u_m + M_1 y^{m-1} a u_{m-1} + M_2 y^{m-2} a^2 u_{m-2} \ldots + M_{m-2} y^2 a^{m-2} u_2 \\ x^m u_m = z^m w_m + M_1 z^{m-1} b w_{m-1} + M_2 z^{m-2} b^2 w_{m-2} \ldots + M_{m-2} z^2 b^{m-2} w_2 \\ y^m w_m = x^m v_m + M_1 x^{m-1} c v_{m-1} + M_2 x^{m-2} c^2 v_{m-2} \ldots + M_{m-2} x^2 c^{m-2} v_2. \end{cases}$$

Für $m = 2$ ergeben diese Gleichungen:

$$(16.)\qquad u_2 : v_2 : w_2 = z^2 : y^2 : x^2,$$

oder die beiden Gleichungen,

$$y^2 u_2 = z^2 v_2,\quad x^2 u_2 = z^2 w_2,$$

von denen die erste dazu gebraucht worden ist, die Anzahl der Wendepuncte

zu bestimmen, wozu aber auf ganz gleiche Weise auch die andere hätte angewandt werden können.

Über die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven.

Die zur Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten im Vorigen angewandte Methode kann auch dazu dienen, die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten zu bestimmen, welche man an zwei gegebne algebraische Curven legen kann, ohne dafs man hiezu die Theorie der gegenseitigen Polarität zweier Curven zu Hülfe zu nehmen braucht.

Es seien $\varphi(x, y, z)$ und $f(x, y, z)$ homogene Functionen von x, y, z von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung. Bedeuten x und y die Coordinaten eines Punctes und z eine Constante, z. B. die Einheit, so werden

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen zweier Curven m^{ten} und n^{ten} Grades, welche ich der Kürze halber die Curven φ und f nennen will.

Es seien x und y die Coordinaten eines Punctes P der Curve f; setzt man wieder

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c,$$

so kann man, wie im Vorhergehenden, die Coordinaten p und q der verschiednen Puncte der in P an die Curve f gelegten Tangente durch eine einzige Gröfse h mittelst der Formeln,

$$p = x + bh, \quad q = y - ah$$

bestimmen. Die Werthe von h, welche den Schneidungspuncten dieser Tangente mit der Curve φ entsprechen, werden dann durch die Gleichung

$$\varphi(p, q, z) = \varphi(x + bh, y - ah, z) = 0$$

bestimmt. Die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Gröfsen x, y Statt finden mufs, damit diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln h habe, bestimmt diejenigen Puncte P der Curve f, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die in ihnen an diese Curve gelegten Tangenten auch die Curve φ berühren. Die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten, welche man an die Curven f und φ legen kann, wird der Anzahl dieser Puncte gleich.

Es sei

$$\varphi(x + bh, y - ah, z) = u_0 + u_1 h + u_2 h^2 + \cdots + u_m h^m,$$

und es werde wieder die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Gröfsen

u_0, u_1, .. u_m Statt finden mufs, damit diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, mit

$$\varDelta(u_0, u_1, u_2, \ldots u_m) = 0$$

bezeichnet, wo $\varDelta$ eine homogene Function der Gröfsen u_0, u_1, .. u_m von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Diese Function kann vermittelst der zwischen den Gröfsen x und y Statt findenden Gleichung $f(x, y, z)$ auf einen niedrigeren Grad gebracht werden; wie aus den folgenden Betrachtungen erhellt.

Da

$$xa + yb + zc = nf = 0,$$

so wird, wenn man wieder $A = 1 - ah$ setzt,

$$\begin{aligned} &\varphi(x + ybh, y - yah, z) \\ &= \varphi(x - xah - zch, y - yah, z) \\ &= \varphi(xA - zch, yA, zA + zah) \\ &= A^m \varphi\left(x - \frac{zch}{A}, y, z + \frac{zah}{A}\right). \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\varphi(x - ch, y, z + ah) = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \cdots + v_m h^m,$$

so mufs dasselbe Resultat erhalten werden, wenn man hierin $\frac{zh}{A}$ für h setzt und mit A^m multiplicirt, oder, wenn man in dem Ausdrucke

$$\varphi(x + bh, y - ah, z) = u_0 + u_1 h + u_2 h^2 + \cdots + u_m h^m$$

yh für y setzt. Man erhält hieraus die Gleichung

$$\begin{aligned} &u_0 + yu_1 h + y^2 u_2 h^2 + \cdots + y^m u_m h^m \\ &= v_0 A^m + zv_1 A^{m-1} h + z^2 v_2 A^{m-2} h^2 + \cdots + z^m v_m h^m. \end{aligned}$$

Es werde der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, wenn man für A seinen Werth $1 - ah$ substituirt und nach den Potenzen von h entwickelt,

$$\begin{aligned} (17.) \quad &\beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \cdots + \beta_m h^m \\ &= v_0 A^m + zv_1 A^{m-1} h + z^2 v_2 A^{m-2} h^2 + \cdots + z^m v_m h^m, \end{aligned}$$

so hat man

$$(18.) \quad u_0 = \beta_0, \; yu_1 = \beta_1, \; y^2 u_2 = \beta_2, \; \ldots \; y^m u_m = \beta_m.$$

Zufolge des Satzes 3. erhält man ferner aus (17.) die identische Gleichung,

$$\begin{aligned} &\varDelta(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m), \\ &= \varDelta(v_0, zv_1, z^2 v_2, \ldots z^m v_m), \end{aligned}$$

und wegen (18.),

$$\Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m)$$
$$= \Delta(u_0,\ y u_1,\ y^2 u_2,\ \ldots\ y^m u_m).$$

Aus dem Satze 2. folgen aber, wenn man darin für die beiden linearen Functionen von h die Ausdrücke 1 und zh oder 1 und yh, deren Determinanten respective z und y sind, annimmt, die identischen Gleichungen,

$$\Delta(v_0,\ z v_1,\ z^2 v_2,\ \ldots\ z^m v_m) = z^{m(m-1)}\Delta(v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m)$$
$$\Delta(u_0,\ y u_1,\ y^2 u_2,\ \ldots\ y^m u_m) = y^{m(m-1)}\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m).$$

Es wird daher

$$(19.)\quad \Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m)$$
$$= z^{mm-m}\Delta(v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m)$$
$$= y^{mm-m}\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m).$$

Die beiden Ausdrücke rechts sind homogene Functionen von x, y, z von derselben Ordnung. Setzt man daher $z = 1$, so zeigt die Formel (19.), dafs man mittelst der Gleichung $f = 0$ die Function

$$y^{mm-m}\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m)$$

in die Function

$$\Delta(v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m)$$

verwandeln kann. Man kann daher, dem Satz 1. zufolge, die Function

$$\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m)$$

selber mittelst der Gleichung $f = 0$ in eine andere rationale ganze Function Δ' verwandeln, deren Grad um $mm-m$ niedriger als der Grad von $\Delta(v_0,\ v_1,\ \ldots\ v_m)$ ist.

Nennt man B_i den Grad von v_i, so bilden die Zahlen B_0, B_1, B_2, ... B_m eine arithmetische Reihe und es wird

$$B_0 = m,\quad B_m = m(n-1).$$

Es wird daher zufolge des Satzes 2. die Function $\Delta(v_0,\ v_1,\ \ldots\ v_m)$ auf den Grad

$$(m-1)(B_0+B_m) = mn(m-1)$$

steigen, und also die Function Δ', in welche man Δ mittelst der Gleichung $f = 0$ verwandeln kann, auf den Grad

$$mn(m-1) - m(m-1) = m(m-1)(n-1).$$

Die Puncte P der Curve f, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die in ihnen

an die Curve f gelegten Tangenten auch die Curve φ berühren, sind daher die Durchschnittspuncte der Curve f vom n^{ten} Grade mit einer Curve vom Grade $m(m-1)(n-1)$, deren Gleichung $\Delta' = 0$ ist, und es wird daher die Anzahl dieser Puncte oder die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten, welche man an die beiden Curven f und φ legen kann, im Allgemeinen

$$mn(m-1)(n-1).$$

Dieses ist genau die Anzahl, welche sich durch die Betrachtung der Polarcurven ergiebt. Nennt man nämlich f' und φ' die Polarcurven von f und φ, so entspricht jeder gemeinschaftlichen Tangente von f und φ ein Durchschnittspunct von f' und φ'. Diese Curven sind aber respective vom Grade $n(n-1)$ und $m(m-1)$, und es ist daher die Anzahl ihrer Durchschnittspuncte im Allgemeinen $m(m-1).n(n-1)$, welches daher auch die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten der Curven f und φ sein mufs.

Königsberg, den 30ten December 1849.

Für Ihre Mittheilung des Beweises von den Doppeltangenten mufs ich Ihnen auch insofern dankbar sein, als ich mich dadurch aufgefordert fühlte, einen letzten Versuch zu machen, die Curve zu bestimmen, welche durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung hindurchgeht, befreit von allen überflüssigen Termen. Dafs eine solche existirt, wufste ich vorher, denn ich kann 7 Kegelschnitte angeben, welche durch sämmtliche Berührungspuncte hindurchgehen, nicht auf die Weise, wie der unrichtige *Plücker*sche Satz über die Kegelschnitte, welche die Curve in den Berührungspuncten schneiden sollen, vermuthen liefse, sondern auf eine ganz andere Art, die ich wegen ihrer Weitläuftigkeit hier nicht angeben kann. Der Versuch gelang und folgendes ist das Resultat: $u = 0$ sei die Gleichung der Curve 4ter Ordnung, Δ die Determinante der Function u, zusammengesetzt aus ihren 2ten Differentialquotienten $u_{11}, u_{22}, \ldots$ Es seien ferner $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots$ die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von Δ. *Setzt man nun*

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{22}u_{33} - u_{23}^2 & v_{23} &= u_{13}u_{12} - u_{11}u_{23} \\ v_{22} &= u_{33}u_{11} - u_{13}^2 & v_{31} &= u_{21}u_{23} - u_{22}u_{31} \\ v_{33} &= u_{11}u_{22} - u_{12}^2 & v_{12} &= u_{32}u_{31} - u_{33}u_{12}, \end{aligned}$$

so ist die gesuchte Gleichung vom 14ten Grade folgende:

$$\begin{aligned} &\{\Delta_1^2 v_{11} + \Delta_2^2 v_{22} + \Delta_3^2 v_{33} + 2\Delta_2\Delta_3 v_{23} + 2\Delta_3\Delta_1 v_{31} + 2\Delta_1\Delta_2 v_{12}\} \\ &-3\Delta\{\Delta_{11}v_{11} + \Delta_{22}v_{22} + \Delta_{33}v_{33} + 2\Delta_{23}v_{23} + 2\Delta_{31}v_{31} + 2\Delta_{12}v_{12}\} = 0. \end{aligned}$$

Die anliegenden Abhandlungen haben Sie wohl die Güte an Herrn G. R. *Crelle* zu befördern. Zum neuen Jahre den aufrichtigsten Glückwunsch Ihres ergebenen Schülers

Otto Hesse.

25.

Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres.

Première lettre.

Près de deux années se sont écoulées, sans que j'aie encore répondu à la lettre pleine de bonté, que Vous m'avez fait l'honneur de m'écrire *). Aujourd'hui, je viens Vous supplier de me pardonner ma longue négligence, et Vous exprimer toute la joie, que j'ai ressentie en me voyant une place dans le recueil de Vos oeuvres. Depuis long-temps éloigné du travail, j'ai été bien touché d'un tel témoignage de Votre bienveillance; permettez-moi, Monsieur, de croire qu'elle ne m'abandonnera pas; elle me devient encore en quelque sorte d'un plus grand prix, en me sentant, après un long intervalle ramené de nouveau à l'étude, sur la voie de quelques unes de vos pensées.

J'ai cru voir l'origine de belles et importantes questions d'analyse dans cette partie de Votre mémoire: „De functionibus quadrupliciter periodicis etc." où Vous établissez l'impossibilité d'une fonction à trois périodes imaginaires. L'algorithme si singulier, par lequel Vous réduisez à un degré de petitesse arbitraire les deux expressions

$$ma + m'a' + m''a'', \qquad mb + m'b' + m''b'',$$

n'est-il pas le premier exemple d'un mode nouveau d'approximation, où les principales questions de la théorie des fractions continues, viennent se représenter, sous un point de vue plus étendu?

Par exemple, étant données deux irrationnelles A, B, on pourra déterminer lorsqu'elle existe, toute relation linéaire telle que:

$$Aa + Bb + c = 0$$

où a, b, c, sont entiers. Qu'on prenne en effet,

$$mA - m' = \alpha, \qquad mB - m'' = \beta,$$

*) Cette lettre imprimée dans le Journal de M. *Liouville* vol. XI page 97 et dans le premier volume des „Opuscula Mathematica" page 357 porte la date du 6 août 1845. *J.*

α et β pourront devenir aussi petits que l'on voudra, d'ailleurs on en conclura:

$$a\alpha + b\beta = m(Aa + Bb) - am' - bm'' = -(am' + bm'' + cm).$$

Le second membre de cette égalité est un nombre entier, donc $a\alpha + b\beta$ ne pourra diminuer au delà de l'unité sans se reduire à zéro. Ainsi le calcul des nombres, m, m', m'', poussé à cette limite, il n'y aura plus qu'à convertir $\frac{\beta}{\alpha}$ en fraction continue pour obtenir la relation cherchée.

Cherchant à appliquer le nouvel algorithme, aux irrationnelles, définies par des équations du 3e degré à coefficients entiers, j'ai vu s'offrir quelques questions d'une grande étendue auxquelles je me suis principalement appliqué, et qui m'ont amené à considérer la méthode d'approximation que je me proposais d'étudier, sous un point de vue bien éloigné de son origine. C'est dans quelques propriétés très élémentaires des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, que j'ai rencontré les principes d'analyse dont je Vous demande la permission de Vous entretenir.

J'ai tiré de ces principes une démonstration de Votre beau théoreme sur la décomposition des nombres premiers $5m+1$, en quatre facteurs complexes, formés des racines cinquièmes de l'unité. Je ne sais, Monsieur, s'il me sera donné de Vous suivre dans les nouvelles régions de l'Arithmétique transcendante, dont Vous avez ainsi ouvert la voie. Jusqu'ici, j'ai eu plutôt en vue dans cette recherche, l'application qui s'offre d'elle-même à la théorie de la division des fonctions Abéliennes dépendante de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$ Peut-etre, d'ailleurs, trouvera-t-on là, des éléments nouveaux, pour cette question si difficile des lois de réciprocité des résidus de 5e puissance, sur laquelle Vous avez le premier appelé l'attention des géomètres.

Tout polynome homogène du second degré à $n+1$ variables,

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n),$$

peut être mis sous la forme:

$$f = \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0}x + \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1} + \cdots + \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_n}x_n.$$

Si l'on pose:

$$\tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0} = X_0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1} = X_1, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_n} = X_n,$$

en nommant D le déterminant relatif à ce système d'équations linéaires, la substitution des variables X_0, X_1, ... X_n, conduira à un nouveau polynome

que je représenterai ainsi, savoir:

$$\frac{F(X_0, X_1, \ldots X_n)}{D}.$$

Cela étant, je nommerai D, le déterminant de f, et F, la forme adjointe à f; on trouve ensuite aisément, *que la forme adjointe à F, sera: $D^{n-1}f$.*

La notion des formes adjointes donne le théorème suivant:

Si la forme f, à $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots x_n$, se change par la substitution:

$$\begin{array}{l} \alpha y_0 + \alpha' y_1 + \alpha'' y_2 + \cdots + \alpha^{(n-1)} y_{n-1} - x_0 = 0 \\ \beta y_0 + \beta' y_1 + \beta'' y_2 + \cdots + \beta^{(n-1)} y_{n-1} - x_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda y_0 + \lambda' y_1 + \lambda'' y_2 + \cdots + \lambda^{(n-1)} y_{n-1} - x_n = 0 \end{array}$$

en la forme g, qui n'en renferme plus que n, le déterminant relatif à g, s'obtiendra par la forme adjointe F, en donnant aux variables $X_0, X_1, \ldots X_n$ respectivement, les valeurs représentées par les coefficients des termes $x_0, x_1, \ldots x_n$ dans le déterminant de la substitution, ces derniers termes étant regardés comme une $(n+1)$ième colonne de coefficients.

Un autre théorème essentiel, dans mon analyse, se fond sur la proposition aisée à démontrer, qu'étant donnée une forme binaire (a, b, a') de déterminant négatif $-D$ et dont les coefficients ne sont plus entiers, mais des quantités quelconques, l'on peut toujours trouver deux nombres entiers premiers entre eux, α, β, tels qu'on ait:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + a'\beta^2 < \sqrt{(\tfrac{4}{3}D)}.$$

Quant aux formes de déterminant positif D, on obtient dans touts les cas la limite inférieure:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + a'\beta^2 < \sqrt{D}.$$

Soit actuellement $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ une forme quelconque à $n+1$ variables, dont les coefficients soient entiers ou irrationnels, et dont le déterminant soit D en valeur absolue, *je dis qu'on pourra toujours trouver $n+1$ nombres entiers, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, tels qu'on ait:*

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}.$$

Supposons que ce théorème soit vrai pour les formes de n variables, on pourra démontrer qu'il est vrai aussi pour les formes de $n+1$ variables, il sera donc vrai en général puisqu'il a lieu pour les formes binaires. Cette

démonstration se base sur le lemme,

> que l'on peut toujours déterminer n colonnes de $n+1$ nombres entiers telles qu'en ajoutant une $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne et formant le déterminant, les coefficients multipliés dans ce déterminant par les différents termes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne, soient des nombres entiers donnés.

En effet, étant proposés $n+1$ nombres entiers quelconques,

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots \ x, \ \lambda,$$

déterminons $a, b, c, \ldots k$ d'une part, $c', d', \ldots k'$ de l'autre, par les équations:

$$a\beta - b\alpha = \pi_1, \quad c'\gamma - c\pi_1 = \pi_2, \quad \ldots \quad k'x - k\pi_{n-2} = \pi_{n-1},$$

où π_1 désigne le p. g. c. d. de α et β, π_2 le p. g. c. d. de γ et π_1, ... π_{n-1} le p. g. c. d. de π_{n-2} et x, on saura prouver *que le déterminant du système:*

$$\begin{array}{cccccccc}
(0) & \frac{\beta}{\pi_1} & \frac{b\gamma}{\pi_2} & \frac{bc\delta}{\pi_3} & \frac{bcd\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & bcd\ldots k.\lambda \\
(1) & -\frac{\alpha}{\pi_1} & -\frac{a\gamma}{\pi_2} & -\frac{ac\delta}{\pi_3} & -\frac{acd\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & -acd\ldots k.\lambda \\
(2) & 0 & \frac{\pi_1}{\pi_2} & \frac{c'\delta}{\pi_3} & \frac{c'd\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & c'd\ldots k.\lambda \\
(3) & 0 & 0 & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & -\frac{d'\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & -d'\ldots k.\lambda \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(n) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (-1)^n\pi_{n-1},
\end{array}$$

est:

$$\alpha(0)+\beta(1)+\gamma(2)+\cdots+\lambda(n).$$

Ce lemme joint au théorème ci-dessus fait voir que *si l'on déduit d'une forme f de $n+1$ variables une autre f_0 de n variables, en substituant aux $n+1$ variables des fonctions linéaires de n variables affectées de coefficients entiers, on pourra choisir ces fonctions à substituer de manière que le déterminant de f_0 devienne*

$$F(\alpha, \beta, \ldots \lambda),$$

F étant la forme adjointe de f et $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ des entiers donnés à l'arbitraire.

L'adjointe de F étant $D^{n-1}f$, on pourra donc aussi déduire de F une forme de n variables F_0 dont le déterminant sera

$$D^{n-1}f(\alpha, \beta, \ldots \lambda),$$

$\alpha, \beta, \ldots \lambda$ étant des entiers donnés quelconques. Donc, dans l'hypothèse

admise pour des formes de n variables, la forme F_0 et par suite la forme F elle même, pourra prendre une valeur moindre que

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{(D^{n-1}f(\alpha,\beta,\ldots\lambda))},$$

valeur que je désignerai par $F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0)$. On prouve de la même manière que f pourra prendre une valeur moindre que

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0)},$$

valeur que je désignerai par $f(\alpha',\beta',\ldots\lambda')$. On aura donc

$$f(\alpha',\beta',\ldots\lambda') < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0)}$$

$$F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{(D^{n-1}f(\alpha,\beta,\ldots\lambda))},$$

et par suite

$$f(\alpha',\beta',\ldots\lambda') < (\tfrac{4}{3})^{\frac{n^2-1}{2n}}\sqrt[n^2]{(D^{n-1}f(\alpha,\beta,\ldots\lambda))}.$$

En continuant de la même manière et en posant

$$f(\alpha^{(i)},\beta^{(i)},\ldots\lambda^{(i)}) = f^{(i)}, \qquad f(\alpha,\beta,\ldots\lambda) = f^{(0)}$$

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{n^2-1}{2n}}\sqrt[n^2]{D^{n-1}} = l,$$

on trouvera successivement

$$f' < l\sqrt[n^2]{f^{(0)}},\quad f'' < l\sqrt[n^2]{f'},\quad \ldots\quad f^{(m)} < l\sqrt[n^2]{f^{(m-1)}},$$

d'où suit

$$f^{(m)} < l^{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\cdots+\frac{1}{n^{2(m-1)}}}\sqrt[n^{2m}]{f^{(0)}}.$$

On pourra donc, en prenant m assez grand, parvenir à une valeur de f,

$$f^{(m)} < l^{\frac{n^2}{n^2-1}} \quad \text{ou} \quad f^{(m)} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D},$$

ce qu'il fallait démontrer.

De nombreuses questions me semblent dépendre des résultats précédents. Voici en premier lieu comment j'ai essayé d'y ramener Votre nouveau mode d'approximation.

A et B étant les quantités données, je considère la forme ternaire

$$f = (x'-Ax)^2+(x''-Bx)^2+\frac{x^2}{\varDelta},$$

dont le déterminant est une quantité positive quelconque $\frac{1}{\varDelta}$. Pour toutes les valeurs de $\varDelta$, on saura déterminer trois nombres entiers, m, m', m'', tels qu'on ait:

$$(m'-Am)^2+(m''-Bm)^2+\frac{m^2}{\varDelta} < \tfrac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\varDelta}},$$

et par suite:

$$m' - Am < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}}, \quad m'' - Bm < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}}, \quad m < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\Delta}.$$

Les deux premières relations font voir qu'on peut rendre simultanément d'un degré de petitesse arbitraire, $m' - Am$, $m'' - Bm$, la troisième donne la mesure précise de l'ordre d'approximation des fractions $\frac{m'}{m}$, $\frac{m''}{m}$, en montrant que l'erreur est proportionnelle à $\frac{1}{m\sqrt{m}}$. Enfin la forme adjointe de f, étant:

$$(x + Ax' + Bx'')^2 + \frac{x'^2 + x''^2}{\Delta},$$

le calcul conduit encore à une suite de nombres entiers, tels que α, β, γ, qui rendent la fonction linéaire $A\alpha + B\beta + \gamma$, de l'ordre $\frac{1}{\alpha^2}$ ou $\frac{1}{\beta^2}$, et on démontre que s'il existe une relation telle que: $Aa + Bb + c = 0$, a, b, c étant entiers, on verra la fonction $Aa + Bb + c$, s'offrir nécessairement à partir d'un certaine valeur de Δ, puis se reproduire indéfiniment, pour toutes les valeurs plus grandes.

Voici d'autres conséquences.

Soit

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + \cdots + Kx + L = 0$$

une équation quelconque irréductible à coefficients entiers et dont $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ soient les racines; si la congruence $F(x) \equiv 0$ admet une solution $x \equiv a$ pour un certain module N, en posant:

$$\varphi(\alpha) = Nx_0 + (\alpha - a)x_1 + (\alpha^2 - a^2)x_2 + \cdots + (\alpha^{n-1} - a^{n-1})x_{n-1},$$

x_0, x_1 etc. désignant des entiers, la forme

$$\mathfrak{f} = \varphi(\alpha)\varphi(\beta) \ldots \varphi(\lambda)$$

représentera toujours des nombres entiers multiples de N: or je dis qu'on pourra trouver une infinité de systèmes de valeurs de $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ pour lesquelles on ait

$$\mathfrak{f} = M.N,$$

l'entier M étant au dessous de la limite,

$$\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left(\frac{\Delta}{n^n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dans laquelle Δ représente le produit des $n(n-1)$ différences des racines $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ prises deux à deux.

Supposons en premier lieu les racines $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ réelles, je considère la forme quadratique à n variables:

$$f = D_0\varphi^2(\alpha) + D_1\varphi^2(\beta) + \cdots + D_{n-1}\varphi^2(\lambda)$$

où $D_0, D_1, \ldots D_{n-1}$ sont essentiellement positifs: soit D, le déterminant de f, on saura trouver pour $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, un système de valeurs entières telles qu'on ait:

$$f = \omega(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D},$$

ω étant moindre que l'unité. Or le produit des quantités positives $D_0\varphi^2\alpha$, $D_1\varphi^2\beta$ etc. ne pourra jamais dépasser son maximum $\left(\frac{f}{n}\right)^n$, correspondant au cas où elles sont toutes égales, on aura donc:

$$D_0D_1 \ldots D_{n-1}\mathfrak{f}^2 < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{D}{n^n}.$$

Il faut ici obtenir D, qui est le déterminant relatif au système des équations linéaires dont les premiers membres seraient:

$$\tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_{n-1}}.$$

Or on trouve sans difficulté:

$$D = \varDelta . D_0D_1 \ldots D_{n-1} . N^2,$$

ce qui conduit à la limite annoncée.

Comme il ne reste dans le résultat aucune trace des quantités, D_0, $D_1, \ldots D_{n-1}$, il suit qu'en leur attribuant toutes les valeurs possibles, *les mêmes multiples de N se reproduiront nécessairement une infinité de fois, pour une infinité de systèmes de valeurs distinctes de $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$.*

Si l'équation proposée, $F(x) = 0$, n'a plus toutes ses racines réelles, on fera correspondre dans la forme f, à chaque couple de racines conjuguées α, β, le produit $D_0\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, au lieu de $D_0\varphi^2(\alpha) + D_1\varphi^2(\beta)$. Dans le cas où toutes les racines seraient imaginaires, ce qui suppose le degré un nombre pair $n = 2\mu$, on sera conduit de la sorte à la forme

$$f = D_0\varphi(\alpha)\varphi(\beta) + D_1\varphi(\gamma)\varphi(\delta) + \cdots + D_{\mu-1}\varphi(\varkappa)\varphi(\lambda).$$

Le déterminant s'obtient aussi dans ce cas aisément, et l'on trouve:

$$D = (D_0D_1 \ldots D_{\mu-1})^2 \cdot \frac{\varDelta}{2^n} \cdot N^2.$$

Comme on a d'ailleurs:

$$D_0 D_1 \ldots D_{\mu-1} \mathfrak{f} < \left(\frac{f}{\mu}\right)^{\mu}$$

et

$$f = \omega \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D},$$

on en tire la limite:

$$M < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \left(\frac{\Delta}{n^n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui ne diffère pas de celle que nous venons d'obtenir dans le cas des racines réelles.

Supposons que l'équation proposée soit:

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

qui donne lieu à une congruence soluble pour tout module premier $N = kp + 1$, Δ sera alors: p^{p-2}. Ainsi dans le cas de $p = 5$, on aura la limite

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{5^3}{4^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

laquelle est > 1 mais < 2, donc on aura précisément

$$\mathfrak{f} = N.$$

C'est, comme Vous voyez, Monsieur, la démonstration de Votre théorème.

Mais il y a plus. Prenant $p = 7$, on trouve l'expression

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{15}{2}} \left(\frac{7^5}{6^6}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est moindre que 6. Or la forme étant toujours $\equiv 0$ ou 1 suivant le module 7, on ne pourra avoir encore dans ce cas que $\mathfrak{f} = N$.

Considérons, en second lieu, l'équation $F(z) = 0$, qui a pour racines les $\frac{1}{2}(p-1)$ périodes de deux racines de $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, on aura la proposition que la congruence $F(z) \equiv 0$ est resoluble pour tout module premier $N = kp - 1$. On trouvera alors: $\Delta = p^{\frac{1}{2}(p-3)}$, d'où l'on tirera comme ci-dessus la limite de M. Dans le cas de $p = 7$, $n = 3$, il vient:

$$M < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{7^2}{3^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et par suite $M < 3$. Or il est facile de voir que suivant le module 7 la forme $\mathfrak{f}$ est toujours $\equiv 0, 1$, ou -1. On ne peut donc admettre que $M = 1$.

De là résulte ce théorème,

que tout nombre premier $7m-1$, *est décomposable en trois facteurs complexes formés des racines de l'équation:*

$$z^3+z^2-2z-1 = 0.$$

En réfléchissant aux questions précédentes, j'ai été conduit à m'occuper de la théorie de la ***réduction*** des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, qui m'a semblé devoir être introduite dans l'étude des expressions telles que $\mathfrak{f}$. De même que pour les formes binaires, on obtient ce résultat que pour un déterminant donné, elles se laissent distribuer en un nombre toujours fini de classes. La méthode de réduction devra reposer encore sur l'emploi de substitutions linéaires à coefficients entiers, et au déterminant ± 1, par lesquelles une forme donnée est changée en une autre entièrement équivalente et de même déterminant. Voici quelques réflexions sur ce sujet.

Soient d'abord

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha X_0+\alpha' X_1+\alpha'' X_2+\,..\,+\alpha^{(n)}X_n \\ x_1 &= \beta X_0+\beta' X_1+\beta'' X_2+\,..\,+\beta^{(n)}X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda X_0+\lambda' X_1+\lambda'' X_2+\,..\,+\lambda^{(n)}X_n \end{aligned}$$

les substitutions qui changent $f(x_0, x_1, .. x_n)$ en la forme équivalente et de même déterminant $F(X_0, X_1, .. X_n)$. Nommons

$$g(y_0, y_1, .. y_n), \quad G(Y_0, Y_1, .. Y_n),$$

les formes adjointes respectivement à f et F, par la définition même donnée ci-dessus des formes adjointes, on prouve très facilement que l'on aura:

$$g(y_0, y_1, .. y_n) = G(Y_0, Y_1, Y_n),$$

en posant:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \alpha y_0+\beta y_1+\,..\,+\lambda y_n \\ Y_1 &= \alpha' y_0+\beta' y_1+\,..\,+\lambda' y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= \alpha^{(n)} y_0+\beta^{(n)} y_1+\,..\,+\lambda^{(n)} y_n. \end{aligned}$$

Il suit de cette proposition que si dans la forme f l'on change seulement les n variables $x_1, x_2, .. x_n$ en d'autres $X_1, X_2, .. X_n$, pour obtenir la transformation correspondante de la forme adjointe, on aura à changer seulement les n variables $y_1, y_2, .. y_n$ en d'autres $Y_1, Y_2, .. Y_n$, et réciproquement. D'où l'on voit *qu'en changeant dans la forme adjointe les n variables $y_1, y_2, .. y_n$ en d'autres $Y_1, Y_2, .. Y_n$, par la transfor-*

mation correspondante de la forme proposée, le coefficient de x_0^2 ne sera pas altéré.

Changeant au contraire, dans la forme proposée, la seule variable x_0 en X par la substitution,

$$x_0 = X + \alpha' x_1 + \alpha'' x_2 + \,..\, \alpha^{(n)} x_n,$$

les substitutions correspondantes à faire dans la forme adjointe seront,

$$y_1 = Y_1 - \alpha' y_0, \quad y_2 = Y_2 - \alpha'' y_0, \quad .. \quad y_n = Y_n - \alpha^{(n)} y_0.$$

D'où l'on voit *qu'en changeant, dans la forme proposée, la seule variable x_0, par la transformation correspondante de la forme adjointe ne seront altérés que les termes multipliés par* y_0 et y_0^2.

Voici le résultat que j'ai obtenu au moyen de ces lemmes:

„Nommons *réduite* une forme

$$F(X_0,\ X_1,\ ..\ X_n),$$

du déterminant D, telle en premier lieu qu'en faisant,

$$\tfrac{1}{2}\frac{dF}{dX_0} = AX_0 + BX_1 + CX_2 + \cdots + LX_n,$$

on ait:

$$A < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}, \quad B < \tfrac{1}{2}A, \quad C < \tfrac{1}{2}A, \quad .. \quad L < \tfrac{1}{2}A,$$

telle encore que la forme adjointe à F, $G(Y_0, Y_1, .. Y_n)$, représente pour $Y_0 = 0$, elle aussi une forme réduite: si l'on sait ramener les formes d'ordre n à des formes équivalentes réduites, on saura aussi ramener à des formes équivalentes réduites, les formes d'ordre $n+1$."

En effet, lorsqu'on se propose de changer la forme donnée f dans une autre équivalente $f_1(x_0', x_1', .. x_n')$, au moyen de la substitution,

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_0' + \alpha' x_1' \,..\, + \alpha^{(n)} x_n' \\ x_1 &= \beta x_0' + \beta' x_1' \,..\, + \beta^{(n)} x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda x_0' + \lambda' x_1' \,..\, + \lambda^{(n)} x_n', \end{aligned}$$

on peut prendre pour α, β, .. λ des entiers quelconques sans commun diviseur, puisqu'on sera toujours maître de déterminer les autres nombres α', β', .. λ', α'', β'', etc. de manière que le determinant des $(n+1)^2$ coefficients soit égal à ± 1 *). Prenons donc pour α, β, .. λ les entiers sans commun diviseur

*) M. *Hermite* avait ajouté à sa lettre la résolution la plus générale de ce problème publiée depuis dans le Journal de M. *Liouville* vol. XIV page 21.

par lesquels on peut satisfaire à l'inégalité

$$f(\alpha, \beta, \ldots \lambda) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D},$$

en nommant A le coefficient de $x_0'^2$ dans la transformée f_1, on aura $A = f(\alpha, \beta, \ldots \lambda)$ et, par suite,

$$A < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}.$$

La forme $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ étant transformée dans la forme équivalente $f(x_0', x_1', \ldots x_n')$, supposons en même temps la forme adjointe à f, $g(y_0, y_1, \ldots y_n)$ transformée dans l'adjointe à f_1, $g_1(Y_0, y_1', y_2', \ldots y_n')$. Faisons ensuite dans cette dernière $Y_0 = 0$, et ramenons la forme d'ordre n, $g_1(0, y_1', y_2', \ldots y_n')$, à une forme équivalente réduite, aux variables $y_1'', y_2'', \ldots y_n''$. Supposons que par la même substitution la forme $g_1(Y_0, y_1', y_2', \ldots y_n')$ soit changée en $g_2(Y_0, y_1'', y_2'', \ldots y_n'')$, cette forme représentera pour $Y = 0$ la forme réduite d'ordre n. Transformons en même temps la forme $f_1(x_0', x_1', \ldots x_n')$, dont g_1 est l'adjointe, dans la forme $f_2(x_0', X_1, X_2, \ldots X_n)$ dont l'adjointe est g_2. De ce qu'on a remarqué ci-dessus, il suit que par cette dernière transformation le coefficient de $x_0'^2$, A, ne sera pas altéré. Enfin faisons

$$x_0' = X_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots m_n X_n$$
$$y_1'' = Y_1 - m_1 Y_0, \quad y_2'' = Y_2 - m_2 Y_0, \quad \ldots \quad y_n'' = Y_n - m_n Y_0,$$

et supposons que par ces substitutions f_2 et g_2 soient changées respectivement en

$$F(X_0, X_1, X_2, \ldots X_n) \quad \text{et} \quad G(Y_0, Y_1, Y_2, \ldots Y_n),$$

le coefficient de X_0^2 dans F sera encore A et la forme G représentera encore pour $Y_0 = 0$ la réduite d'ordre n. Or posant

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_0'} = A x_0' + b X_1 + c X_2 \ldots + l X_n$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_0} = A X_0 + B X_1 + C X_2 \ldots + L X_n,$$

on aura $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_0'} = \dfrac{\partial F}{\partial X_0}$ et, par suite,

$$B = b + m_1 A, \; C = c + m_2 A, \; \ldots \; L = l + m_n A.$$

Donc, $m_1, m_2, \ldots m_n$ pouvant être des entiers quelconques, on saura les déterminer de manière qu'on ait

$$B < \tfrac{1}{2}A, \; C < \tfrac{1}{2}A, \; \ldots \; L < \tfrac{1}{2}A,$$

et l'on aura ainsi satisfait à toutes les conditions.

Je remarquerai à présent *qu'étant donnés*

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \quad \text{et} \quad G(0,\ Y_1,\ Y_2,\ ..\ Y_n),$$

en même temps que le déterminant D de F, on connaîtra la forme $G(Y_0,\ Y_1,\ ..\ Y_n)$ et, par suite, $F(X_0,\ X_1,\ ..\ X_n)$. En effet, soit

$$\begin{aligned} F = {} & X_0(AX_0 + BX_1 + CX_2 + \cdots + LX_n) \\ & + X_1(BX_0 + B'X_1 + C'X_2 + \cdots + L'X_n) \\ & + X_2(CX_0 + C'X_1 + C''X_2 + \cdots + L''X_n) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & + X_n(LX_0 + L'X_1 + L''X_2 + \cdots + L^{(n)}X_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = {} & Y_0((A)Y_0 + (B)Y_1 + \cdots + (L)Y_n) \\ & + Y_1((B)Y_0 + (B')Y_1 + \cdots + (L')Y_n) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & + Y_n((L)Y_0 + (L')Y_1 + \cdots + (L^{(n)})Y_n), \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} A(A) + B(B) + C(C) + \cdots + L(L) &= D \\ A(B) + B(B') + C(C') + \cdots + L(L') &= 0 \\ A(C) + B(C') + C(C'') + \cdots + L(L'') &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A(L) + B(L') + C(L'') + \cdots + L(L^{(n)}) &= 0. \end{aligned}$$

Or étant donnés $\frac{\partial F}{\partial X_0}$ et $G(0,\ Y_1,\ ..\ Y_n)$, on connaîtra

$$A,\ B,\ C,\ ..\ L$$

et touts les n^2 coefficients (B'), (C') etc., d'où l'on déduira par les n dernières équations, les valeurs des coefficients

$$(B),\ (C),\ ..\ (L),$$

et par la première, D étant aussi donné, celle du coefficient (A). On connaîtra donc touts les coefficients de $G(Y_0,\ Y_1,\ ..\ Y_n)$ et, par suite, ceux de $F(X_0,\ X_1,\ ..\ X_n)$.

Par ce qui précède on prouve aisément *que les formes d'un ordre quelconque attachées à un même déterminant, peuvent être ramenées à un nombre fini d'entre elles.* Et d'abord il suit des conditions ci-dessus que les coefficients $A,\ B,\ ..\ L$ ne pourront prendre qu'un nombre fini de valeurs, ensuite le déterminant de la forme $G(0,\ Y_1,\ Y_2,\ ..\ Y_n)$, étant $D^{n-1}A$, s'il

est démontré que les formes d'ordre n d'un même déterminant peuvent être ramenées à un nombre fini d'entre elles, on n'aura pour chaque valeur de A qu'un nombre limité de formes $G(0, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$. Or, par les nombres $A, B, \ldots L$ et la forme $G(0, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$, étant déterminée la forme d'ordre $n+1$, $F(X_0, X_1, \ldots X_n)$, ces formes aussi seront en nombre fini. Ainsi la proposition étant admise pour les formes d'ordre n, elle sera démontrée pour les formes d'ordre $n+1$. Elle est donc vraie en général puisqu'elle a lieu pour les formes binaires.

Vous voyez, Monsieur, que j'omets tout-à-fait, le cas important où l'on a $A=0$; mais cette circonstance n'est point à considérer, lorsqu'on se propose seulement de poursuivre les rapports que j'ai essayé d'établir entre les formes quadratiques définies et les expressions désignées ci-dessus par $\mathfrak{f}$. Les résultats précédents me semblent alors ouvrir un vaste champ de recherches, mais dans lequel je n'ai presque fait jusqu'ici qu'entrevoir une longue série de questions et de problèmes difficiles à résoudre.

Convenons d'abord des notations suivantes, savoir:

$$\mathfrak{f} = f(\omega_0) f(\omega_1) \ldots f(\omega_n),$$

en prenant:

$$f(\omega) = x_0 \varphi_0(\omega) + x_1 \varphi_1(\omega) + \cdots + x_n \varphi_n(\omega),$$

$\varphi_i(\omega)$ désignant la fonction à coefficients entiers:

$$a_i + b_i \omega + c_i \omega^2 + \cdots + l_i \omega^n,$$

et les quantités $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n$ étant toujours les racines d'une même équation irréductible à coefficients entiers et dont celui de la plus haute puissance est l'unité. Je considère ensuite (dans le cas où toutes les racines sont réelles), la forme quadratique définie, d'ordre $n+1$,

$$\mathfrak{f} = D_0 f^2(\omega_0) + D_1 f^2(\omega_1) + \cdots + D_n f^2(\omega_n),$$

où $D_0, D_1, \ldots D_n$ sont supposés essentiellement positifs. En nommant Ω le produit des $n(n+1)$ différences des racines ω prises deux à deux, et Δ le déterminant du système:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_0 & l_1 & \ldots & l_n, \end{matrix}$$

on trouvera pour le déterminant de $\mathfrak{f}$ l'expression:

$$D = D_0 D_1 \ldots D_n \Delta^2 \Omega.$$

Cela posé, faisons la substitution:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha X_0 + \alpha' X_1 + \,.\,.\, + \alpha^{(n)} X_n \\ x_1 &= \beta X_0 + \beta' X_1 + \,.\,.\, + \beta^{(n)} X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda X_0 + \lambda' X_1 + \,.\,.\, + \lambda^{(n)} X_n, \end{aligned}$$

les coefficients étant déterminés par la méthode exposée tout-à-l'heure, de manière à réduire la forme adjointe à f. En posant pour abréger:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\omega) &= \alpha^{(i)}\varphi_0(\omega) + \beta^{(i)}\varphi_1(\omega) + \cdots + \lambda^{(i)}\varphi_n(\omega) \\ F(\omega) &= X_0\Phi_0(\omega) + X_1\Phi_1(\omega) + \cdots + X_n\Phi_n(\omega), \end{aligned}$$

la forme quadratique f deviendra d'une part:

$$\mathrm{F} = D_0 F^2(\omega_0) + D_1 F^2(\omega_1) + \cdots + D_n F^2(\omega_n),$$

et la forme f, de l'autre:

$$\mathfrak{F} = F(\omega_0) F(\omega_1) \,.\,.\, F(\omega_n).$$

Or voici le dernier résultat auquel je suis arrivé, et qui me parait appeler bien de recherches après lui.

> Les substitutions en nombre infini, correspondantes à touts les systèmes possibles de valeurs des quantités D_0, D_1, . . D_n, ne conduiront jamais qu'à un nombre essentiellement limité de formes $\mathfrak{F}$.

De là se tire aussi toute la théorie de la réduction des formes f.

Je me suis principalement fondé sur la proposition suivante:

> Étant donnée une forme quadratique f d'ordre $n+1$, de déterminant D, réduite d'après la méthode ci-dessus, soient
>
> $$(a),\ (a'),\ (a''),\ .\,.\ (a^{(n)})$$
>
> les coefficients des carrés dans la forme adjointe g, on aura d'abord, comme on sait,
>
> $$(a^{(n)}) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D},$$
>
> puis pour toutes les valeurs $i = 1, 2, .\,.\ n$:
>
> $$(a^{(n)})^i (a^{(n-i)}) < \mu \sqrt[n+1]{(D^{n(i+1)})},$$
>
> μ étant un facteur numérique dépendant uniquement de n et i.

Je vais prendre les formes *ternaires* pour exemple de la méthode qui donne ce résultat.

Soit $ax_0^2 + 2bx_0x_1 + 2cx_0x_2 +$ etc. la forme réduite donnée et

$$(a)y_0^2 + (a')y_1^2 + (a'')y_2^2 + 2(b)y_0y_1 + 2(c)y_0y_2 + 2(c')y_1y_2$$

son adjointe g, la théorie générale donne en premier lieu les relations:

$$a < (\tfrac{4}{3})\sqrt[3]{D}, \quad b < \tfrac{1}{2}a, \quad c < \tfrac{1}{2}a;$$

ensuite pour $y_0 = 0$, g doit devenir une forme binaire réduite. Cette dernière étant représentée par $(a')y_1^2 + 2(c')y_1y_2 + (a'')y_2^2$, son déterminant, comme on le sait, est aD, on a donc encore:

$$(a'') < \sqrt{(\tfrac{4}{3}aD)}, \quad (a')(a'') < \tfrac{4}{3}aD, \quad (c') < \tfrac{1}{2}(a'').$$

Or des relations:

$$\begin{aligned} a(a) + b(b) + c(c) &= D \\ a(b) + b(a') + c(c') &= 0 \\ a(c) + b(c') + c(a'') &= 0, \end{aligned}$$

on déduit sans difficulté:

$$(c) < \tfrac{3}{4}(a''), \quad (b)(a'') < aD, \quad (c)(a'') < aD.$$

Donc, après avoir multiplié les deux membres de la première équation par $(a'')^2$ et divisé par a, on obtient:

$$(a)(a'')^2 < \tfrac{4}{3}D^2 + aD\sqrt{(\tfrac{4}{3}aD)},$$

et enfin, en remplaçant a par sa limite supérieure:

$$(a)(a'')^2 < \tfrac{28}{9}D^2.$$

La propriété énoncée ci-dessus des formes réduites, qui m'a longtemps échappé, donne lieu à beaucoup d'autres conséquences que je suis forcé d'omettre. Seulement j'observerai encore qu'en prenant pour point de départ g au lieu de f, et nommant $a^{(i)}$ les coefficients des carrés dans cette dernière forme, on serait arrivé pour les formes ternaires aux relations:

$$a'' < \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{D}, \quad a'a'' < (\tfrac{4}{3})^2\sqrt[3]{D^2}, \quad aa''^2 < \tfrac{28}{9}D,$$

et on trouverait dans le cas général:

$$a^{(n)} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D}, \quad a^{(n)^i}a^{(n-i)} < \mu\sqrt[n+1]{D^{i+1}},$$

d'où l'on tire encore:

$$a^{(n)^n}a^{(n-i)} < \nu . D.$$

Appliquons maintenant ces résultats à la forme quadratique:

$$\mathrm{F} = D_0F^2(\omega_0) + D_1F^2(\omega_1) + \cdots + D_nF^2(\omega_n),$$

dont le déterminant a pour valeur:

$$D = D_0D_1 \ldots D_n\Delta^2\Omega.$$

Il est aisé de voir qu'on aura:

$$a^{(i)} = D_0 \Phi_i^2(\omega_0) + D_1 \Phi_i^2(\omega_1) + \cdots + D_n \Phi_i^2(\omega_n),$$

donc en premier lieu:

$$D_0 D_1 \,.\,.\, D_n . \Phi_n^2(\omega_0) \Phi_n^2(\omega_1) \,.\,.\, \Phi_n^2(\omega_n) < a^{(n)^{n+1}},$$

d'où:

$$\Phi_n(\omega_0) \Phi_n(\omega_1) \,.\,.\, \Phi_n(\omega_n) < \mu . \varDelta \Omega^{\frac{1}{2}},$$

ce qui reproduit une conséquence obtenue précédemment. Secondement, faisons abstraction dans $a^{(n)}$, du terme $D_k \Phi_n^2(\omega_k)$, il est clair qu'on aura:

$$D_0 D_1 \,.\,.\, D_{k-1} D_{k+1} \,.\,.\, D_n . \Phi_n^2(\omega_0) \Phi_n^2(\omega_1) \,.\,.\, \Phi_n^2(\omega_{k-1}) \Phi_n^2(\omega_{k+1}) \,.\,.\, \Phi_n(\omega_n) < (a^{(n)})^n,$$

donc combinant cette inégalité avec la suivante:

$$D_k \Phi_i^2(\omega_k) < a^{(i)},$$

et posant pour abréger:

$$\Psi_i(\omega_k) = \Phi_i(\omega_k) . \Phi_n(\omega_0) \Phi_n(\omega_1) \,.\,.\, \Phi_n(\omega_{k-1}) \Phi_n(\omega_{k+1}) \,.\,.\, \Phi_n(\omega_n),$$

il viendra:

$$D_0 D_1 \,.\,.\, D_n \Psi_i^2(\omega_k) < (a^{(n)})^n (a^{(i)}) < \nu . D,$$

d'où:

$$\Psi_i(\omega_k) < \nu \varDelta \Omega^{\frac{1}{2}}.$$

Or $\Psi_i(\omega)$ est, comme on le voit aisément, un polynome entier en ω. Les diverses valeurs de ce polynome correspondantes aux diverses racines $\omega_0, \omega_1, \,.\,.\, \omega_n$, étant toutes finies et même proportionnelles à $\varDelta \Omega^{\frac{1}{2}}$, il en sera de même de touts ses coefficients qui sont des nombres entiers; de là suit immédiatement le résultat que je voulais obtenir.

On peut mettre en effet $F(\omega_k)$ sous la forme:

$$F(\omega_k) = \Phi_n(\omega_k) \left\{ X_n + X_{n-1} \frac{\Phi_{n-1}(\omega_k)}{\Phi_n(\omega_k)} + \cdots + X_i \frac{\Phi_i(\omega_k)}{\Phi_n(\omega_k)} + \cdots \right\},$$

ou bien:

$$F(\omega_k) = \Phi_n(\omega_k) \left\{ X_n + X_{n-1} \frac{\Psi_{n-1}(\omega_k)}{\Psi_n(\omega_k)} + \cdots + X_i \frac{\Psi_i(\omega_k)}{\Psi_n(\omega_k)} + \cdots \right\}.$$

Donc toutes les formes $\mathfrak{f}$ en nombre infini, qui correspondent à une même valeur du déterminant $\varDelta$, peuvent être ramenées par les substitutions précédentes à un nombre d'entr'elles essentiellement limité, car les combinaisons de toutes les valeurs entières possibles pour les coefficients des polynomes $\Psi_i(\omega)$ sont en nombre fini. Enfin ces dernières formes qu'on peut nommer réduites, se représenteront elles-mêmes une infinité de fois en employant

successivement les diverses substitutions qui correspondent à touts les systèmes de valeurs imaginables des quantités positives D_0, D_1, .. D_n.

Dans le cas spécial des formes f que j'ai d'abord considéré, pour démontrer Votre théorème sur les nombres premiers $5m+1$, on démontre facilement que les polynomes $\Psi_i(\omega)$ contiennent touts en facteur le nombre N, c'est donc uniquement de Ω que dépendront les limites des coefficients dans les formes réduites. On entrevoit ainsi la possibilité d'obtenir, par exemple, tout ce qui se rattache à la représentation des nombres premiers $11m+1$, par des facteurs complexes formés des racines onzièmes de l'unité, en opérant non plus sur chaque nombre donné, mais en général sur les racines de l'équation $x^{11}=1$.

Mais j'ai hâte, Monsieur, de finir cette longue lettre, où il n'y a plus place pour la théorie des fonctions elliptiques. Je n'ai pu jusqu'ici faire à mon gré cette recherche de l'ensemble des transformations de la fonction Θ, ni retrouver ce résultat si remarquable de la réduction du module q à la limite $e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$, dont Vous m'avez parlé dans Votre lettre. Oserais-je Vous demander quelques éclaircissements sur ce point? Mr. ***Borchardt***, a eu la bonté de me mettre un peu sur la voie pour déduire les propriétés des fonctions Θ de la multiplication des quatre séries $\Sigma e^{-(ax+ib)^2}$, mais je ne sais si je pourrai marcher bien loin. Permettez-moi, Monsieur, de Vous prier de me rappeler à son souvenir, j'ai entendu Mr. *Sturm* parler avec de grands éloges de son mémoire publié par Mr. *Liouville*.

Ayez la bonté, si Vous le jugez convenable, de faire paraître dans le journal de Mr. *Crelle* quelques uns des résultats précédents, j'essayerai ensuite de les développer plus complètement.

P. S. J'aperçois à l'instant que l'algorithme indiqué pour déterminer les nombres entiers α, β, .. λ tels qu'on ait:

$$f(\alpha, \beta, \ldots \lambda) > (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}$$

peut être présenté d'une manière bien plus précise.

En premier lieu pour les formes *binaires* de déterminant $-D$: „on ne peut objecter que les opérations continuent à l'infini, car on verrait s'offrir une infinité de quantités a, a', a'' etc. liées par les relations $a > a' > a''$ etc. et par conséquent différentes. Mais à chacune d'elles correspondent deux nombres entiers $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, qui donnent p. ex.

$$a^{(m)} = a\alpha^{(m)2} + 2b\alpha^{(m)}\beta^{(m)} + a'\beta^{(m)2}.$$

Ces nombres sont essentiellement limités, donc il faudrait qu'une même combinaison α, β se produisit dans le cours du calcul une infinité de fois, ce qui conduirait à supposer égaux, contre l'hypothèse, une infinité de termes de la suite a, a', a'' etc."

Pour les formes *ternaires:* „désignant pour abréger $f(\alpha^{(m)}, \beta^{(m)}, \gamma^{(m)})$ par $f^{(m)}$, on voit naître de la continuation du calcul précédemment proposé, une suite de quantités, f, f', f'' etc. liées par les relations,

$$f' < \sqrt[4]{((\tfrac{4}{3})^3 Df)}, \quad f'' < \sqrt[4]{((\tfrac{4}{3})^3 Df')} \quad \text{etc.}$$

Or on obtiendra la limite annoncée, dès qu'il se présentera une valeur $f^{(m+1)}$ égale ou supérieure à la précédente $f^{(m)}$. En effet, de

$$f^{(m+1)} > f^{(m)} \quad \text{et} \quad f^{(m+1)} < \sqrt[4]{((\tfrac{4}{3})^3 Df^{(m)})},$$

on déduit aisément:

$$f^{(m)} < \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{D}.$$

D'ailleurs on ne peut admettre, dans le cas d'une forme définie, que les opérations se prolongent indéfiniment, car les nombres $\alpha^{(m)}$, $\beta^{(m)}$, $\gamma^{(m)}$ étant essentiellement limités, on verrait se reproduire une infinité de fois une même combinaison de ces nombres entiers, ce qui ramenerait les mêmes termes dans la suite f, f', f'', contrairement à l'hypothèse. Si la forme f est indéfinie, mais à coefficients entiers (seul cas dont j'aurai besoin plus tard), la même conclusion subsiste, puisqu'une suite de nombres entiers décroissante ne peut aller à l'infini."

Pour les formes *quaternaires.* „Or ici se représentent les mêmes considérations que dans le cas des formes ternaires; dès que le calcul conduira à un terme $f^{(m+1)}$ égal ou supérieur au précédent, on obtiendra la limite annoncée, car de $f^{(m+1)} \geqq f^{(m)}$ et $f^{(m+1)} < \sqrt[9]{((\tfrac{4}{3})^{12} D^2 f^{(m)})}$, on déduit: $f^{(m)} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{D}$. D'ailleurs les opérations s'arrêteront toujours, quels que soient les coefficients, si l'on opère sur une forme définie, et la même chose aura lieu pour une forme même indéfinie, mais à coefficients entiers."

(La continuation de ces lettres au cahier prochain.)

Berichtigungen in diesem Hefte.

S. 212 Z. 19 v. o. ist statt der 9 Wurzeln dreimal $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ zu lesen.
— 220 — 1 v. u. sind $(l-2m)$ und $(n-l)$ zu vertauschen.
— 228 — 9 v. u. ist statt „erste" zu lesen „zweite"
— 229 — 16 v. o. ist vor $bc-a'^2$ einzuschalten: „b so wie"

Crelle, Journal d. Math. Bd. 40 Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Castillon.

Monsieur

Une incommodité, qui commence à devenir longue ne me permettant pas de me rendre à l'Academie, agréez que je vous prie par ce billet de solliciter la réponse des Classes de Mathematiques et de Physique experimentale au sujet de ma demande.

J'ai l'honneur d'etre avec toute la consideration possible,

Monsieur,

à Berlin le 7 Fevrier 1766

Votre très humble et très obeissant serviteur

J. De Castillon

26.

Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres.

(Continuation de ces lettres au cahier précédent.)

Deuxième lettre.

Permettez-moi de venir encore Vous soumettre ce qu'il m'est arrivé de rencontrer sur la théorie des formes quadratiques, depuis la dernière fois que j'ai eu l'honneur de Vous écrire. J'avais ébauché bien à la hâte, dans ma lettre, la démonstration de cette propriété générale des formes de même déterminant, de se laisser distribuer en un nombre fini de classes; depuis j'ai été amené à une méthode de réduction plus simple et surtout plus analogue a l'algorithme de *Lagrange* pour les formes binaires. Soyez assez bon, Monsieur, pour me pardonner, s'il m'arrive ainsi de Vous entretenir de choses que je n'ai pas encore suffisamment mûries; en présence d'une théorie d'une immense étendue, je cède au plaisir de Vous communiquer quelques résultats placés à l'abord de questions difficiles et qui peut-être seront au dessus de mes forces. Ainsi me suis-je borné, comme application de ma nouvelle méthode de réduction, à calculer les formes définies réduites de déterminant 1, à 3, 4, 5, 6, 7 et 8 variables, et j'ai trouvé comme dans le cas des formes binaires, une seule classe, représentée par une somme de 3, 4, 5, 6, 7 et 8 carrés. L'idée principale de cette méthode consiste dans l'introduction de certaines formes liées intimement, comme je suis parvenu à le reconnaître, aux formes adjointes de Mr. *Gaufs*, mais qu'il me semble indispensable de considérer d'une manière explicite. En représentant par

$$f(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_0^n {}_j \sum_0^n {}_i a_{i,j} x_i x_j,$$

sous la condition:

$$a_{i,j} = a_{j,i},$$

une forme quelconque d'ordre $n+1$ (c. à d. à $n+1$ indéterminées), je les définis de la manière suivante:

$$g(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n) = \sum_1^n {}_j \sum_1^n {}_i b_{i,j} y_i y_j,$$

en prenant:

$$b_{i,j} = a_{0,0}a_{i,j} - a_{0,i}a_{0,j},$$

et voici le théorème auquel elles donnent lieu.

Si la substitution

$$(1.)\quad \begin{cases} x_0 = X_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots + M_nX_n \\ x_1 = \qquad m_1X_1 + m_2X_2 + \cdots + m_nX_n \\ x_2 = \qquad n_1X_1 + n_2X_2 + \cdots + n_nX_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \qquad t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_nX_n \end{cases}$$

change $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ en $F(X_0, X_1, \ldots X_n)$, en nommant $F(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ la forme d'ordre n déduit de F, comme g l'est de f, on aura

$$g(y_1, y_2, \ldots y_n) = G(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$$

en posant

$$(2.)\quad \begin{cases} y_1 = m_1Y_1 + m_2Y_2 + \cdots + m_nY_n \\ y_2 = n_1Y_1 + n_2Y_2 + \cdots + n_nY_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = t_1Y_1 + t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n. \end{cases}$$

Pour abréger, je nommerai g, *la forme dérivée* de f, et (2.) la substitution dérivée de (1.). On trouve aisément, que g est définie et positive, si f est elle-même définie et positive, que le déterminant de g est:

$$D_0 = a_{0,0}^{n-1}D,$$

D étant le déterminant de f, et enfin que l'équivalence de f et F, entraine celle de g et G, la seule condition pour cela étant que le déterminant relatif aux équations (2.) soit en valeur absolue, l'unité.

De là, se tire une conséquence importante; concevons que la substitution dérivée soit prise de telle sorte que G devienne une forme réduite de son ordre, les coefficients, M_1, M_2, .. M_n, resteront encore arbitraires; or je dis qu'en posant:

$$F(X_0, X_1, X_2, \ldots X_n) = \sum_0^n{}_i \sum_0^n{}_i A_{i,j}X_iX_j,$$

on pourra les déterminer de manière à remplir la condition:

$$A_{0,i} < \tfrac{1}{2}A_{0,0}$$

pour $i = 1, 2, \ldots n$. Cela résulte en effet, de la valeur suivante:

$$A_{0,i} = M_ia_{0,0} + m_ia_{0,1} + n_ia_{0,2} + \ldots + t_ia_{0,n},$$

qu'il est facile d'obtenir, et on a d'ailleurs $a_{0,0} = A_{0,0}$. Il est essentiel d'observer qu'au lieu de $a_{0,0}$, qui se conserve en passant de f à F, on aurait pu employer, dans ce qui précède, aussi bien, l'un quelconque des coefficients $a_{\mu,\mu}$ des carrés des variables. Soit donc pour plus de clarté g_μ la forme dérivée composée avec ce coefficient, on pourra énoncer la proposition suivante:

Toute forme

$$f = \Sigma\Sigma a_{i,j} x_i x_j$$

peut être transformée en une autre équivalente:

$$f' = \Sigma\Sigma a'_{i,j} x_i x_j,$$

telle qu'ayant p. ex.

$$a'_{\mu,\mu} = a_{\mu,\mu},$$

la dérivée g'_μ soit une forme réduite de son ordre, et que la condition

$$a'_{\mu,i} < \tfrac{1}{2} a'_{\mu,\mu},$$

soit remplie pour toutes les valeurs de i autres que $i = \mu$.

C'est là dessus que se fonde l'algorithme de réduction des formes définies, quelle que soit la nature de leurs coefficients, entiers ou irrationnels, mais voici d'abord le but des opérations. Supposons que précédemment, on ait choisi pour $a_{\mu,\mu}$ le plus petit des coefficients $a_{i,i}$, deux cas peuvent se présenter; ou bien $a'_{\mu,\mu} = a_{\mu,\mu}$ restera encore la plus petite des quantités $a'_{i,i}$ dans la transformée f', ou bien il s'offrira un autre coefficient $a'_{\mu',\mu'} < a'_{\mu,\mu}$. Or dans le premier cas, toutes les autres conditions étant d'ailleurs remplies, f' sera ce que je nomme une forme réduite. Mais si c'est le second, qui se présente, on poursuivra les opérations en partant de f', comme tout-à-l'heure en partant de f, et en général, on déduira successivement les unes des autres, une suite de transformées:

$$f, \quad f', \quad f'', \quad \ldots \quad f^{(k)},$$

toutes équivalentes et telles que

$$a_{\mu,\mu}, \quad a'_{\mu',\mu'}, \quad a''_{\mu'',\mu''}, \quad \ldots \quad a^{(k)}_{\mu^{(k)},\mu^{(k)}}$$

désignant respectivement les plus petits des coefficients:

$$a_{i,i}, \quad a'_{i,i}, \quad a''_{i,i}, \quad \ldots \quad a^{(k)}_{i,i},$$

on ait:

$$a_{\mu,\mu} > a_{\mu',\mu'} > a''_{\mu'',\mu''} \quad \ldots > a^{(k)}_{\mu^{(k)},\mu^{(k)}}$$

$$a'_{\mu,i} > \tfrac{1}{2} a'_{\mu,\mu}, \quad a''_{\mu',i} < \tfrac{1}{2} a''_{\mu',\mu'}, \quad \ldots \quad a^{(k)}_{\mu^{(k-1)},i} < a^{(k)}_{\mu^{(k-1)},\mu^{(k-1)}},$$

et que d'ailleurs les diverses dérivées

$$g_{\mu}, \quad g'_{\mu'}, \quad g''_{\mu''}, \quad \ldots \quad g^{(k)}_{\mu^{(k)}}$$

soient des formes réduites de leur ordre.

Or je dis qu'un tel système d'opérations ne peut se prolonger à l'infini, et qu'on obtiendra nécessairement une transformée

$$\mathfrak{F} = \Sigma\Sigma\mathfrak{A}_{i,j}x_i x_j$$

devant être considérée comme une forme réduite. En effet, partant d'une forme *définie* f, les quantités $a_{\mu,\mu}$, $a_{\mu',\mu'}$ seront des valeurs de f, en supposant aux indéterminées de valeurs entières, et l'on ne saurait former qu'un nombre limité de ces valeurs restant toujours inférieures à un certain maximum, donc on ne peut admettre l'hypothèse d'une infinité de quantités de cette sorte, continuellement décroissantes, et par conséquent inégales.

Je vais maintenant faire voir que touts les coefficients $\mathfrak{A}_{i,j}$, d'une forme définie réduite $\mathfrak{F}$, ne peuvent excéder certaines limites, qui dépendent du déterminant et du nombre des indéterminées. Pour cela il faut d'abord établir la condition suivante:

$$\mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{1,1}.\mathfrak{A}_{2,2}\ldots\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n+1)}D$$

qui est l'extension d'une relation obtenue dans la théorie des formes binaires.

Supposons qu'elle soit admise pour les formes réduites d'ordre n, et désignons par ex. par $\mathfrak{A}_{0,0}$ le plus petit des coefficients $\mathfrak{A}_{i,i}$, la dérivée

$$\mathfrak{G} = \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i \mathfrak{B}_{i,j}x_i x_j$$

étant une forme réduite de cet ordre, et son déterminant ayant pour valeur

$$D_0 = \mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D,$$

on devra avoir:

$$(3.) \qquad \mathfrak{B}_{1,1}.\mathfrak{B}_{2,2}.\mathfrak{B}_{3,3}\ldots\mathfrak{B}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n-1)}\mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D.$$

Or la valeur générale

$$(4.) \qquad \mathfrak{B}_{i,j} = \mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{i,j} - \mathfrak{A}_{0,i}.\mathfrak{A}_{0,j}$$

donne lorsque les deux indices sont égaux:

$$\mathfrak{B}_{i,i} = \mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{i,i} - \mathfrak{A}_{0,i}^2,$$

de sorte que les quantités positives $\mathfrak{B}_{i,i}$ peuvent être considérées comme les déterminants changés de signes, d'autant des formes binaires $(\mathfrak{A}_{0,0}, \mathfrak{A}_{0,i}, \mathfrak{A}_{i,i})$ toutes réduites, car on a à la fois

$$\mathfrak{A}_{0,0} < \mathfrak{A}_{i,i} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_{0,i} < \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{0,0},$$

donc on peut poser

$$\mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{i,i} < \tfrac{4}{3}\mathfrak{B}_{i,i};$$

de là on conclut, l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs de i:

$$\mathfrak{A}_{0,0}^{n}.\mathfrak{A}_{1,1}.\mathfrak{A}_{2,2}\ldots\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{n}\mathfrak{B}_{1,1}.\mathfrak{B}_{2,2}\ldots\mathfrak{B}_{n,n},$$

et enfin d'après la relation (3.):

$$\mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{1,1}.\mathfrak{A}_{2,2}\ldots\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n+1)}D.$$

Cette condition est par là démontrée dans toute sa généralité puisqu'elle a lieu pour les formes binaires.

Comme conséquence immédiate, on voit que les quantités $\mathfrak{A}_{i,i}$, $\mathfrak{A}_{0,i}$ sont nécessairement limitées, et il en est de même encore du déterminant D_0 de la dérivée, qui a pour valeur: $\mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D$. Cela posé, admettons que les formes réduites d'ordre n aient touts leurs coefficients limités, je dis que la même chose aura lieu pour les formes d'ordre $n+1$. En effet, toutes les quantités $\mathfrak{B}_{i,j}$, devront se trouver finies, donc d'après la relation (4.) qui donne:

$$\mathfrak{A}_{i,j} = \frac{\mathfrak{B}_{i,j}+\mathfrak{A}_{0,i}.\mathfrak{A}_{0,j}}{\mathfrak{A}_{0,0}},$$

il en sera de même en général pour $\mathfrak{A}_{i,j}$. Or la proposition à laquelle je voulais arriver, résulte immédiatement de là, puisqu'elle a lieu pour les formes binaires, et dans le cas de coefficients *entiers,* elle donne ce théorème: les formes définies ou indéfinies réduites pour un déterminant donné, sont en nombre fini.

Maintenant, voici une remarque essentielle pour l'application des principes précédents au calcul de ces formes.

Soit toujours D le déterminant donné, et

$$\mathfrak{F} = \Sigma\Sigma\mathfrak{A}_{i,j}x_i x_j$$

l'une quelconque des formes définies réduites pour ce déterminant, la relation

$$\mathfrak{A}_{0,0}\mathfrak{A}_{1,1}\mathfrak{A}_{1,2}\ldots\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n+1)}D$$

donne d'abord la limite

$$\mathfrak{A}_{0,0} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D}$$

pour le plus petit des coefficients $\mathfrak{A}_{i,i}$. Soit encore

$$\mathfrak{G} = \Sigma\Sigma\mathfrak{B}_{i,j}x_i x_j$$

la dérivée réduite, composée avec $\mathfrak{A}_{0,0}$ et dont le déterminant est

$$D_0 = \mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D.$$

En désignant par $\mathfrak{B}_{\mu,\mu}$ le plus petit des coefficients $\mathfrak{B}_{i,i}$, on aura de même

$$\mathfrak{B}_{\mu,\mu} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D_0}.$$

Mais d'après ce que j'ai observé ci-dessus, $\mathfrak{B}_{\mu,\mu}$ peut être considéré comme le déterminant changé de signe de la forme binaire réduite $(\mathfrak{A}_{0,0}, \mathfrak{A}_{0,\mu}, \mathfrak{A}_{\mu,\mu})$, donc on aura:

1°. si $\mathfrak{A}_{0,0}$ est pair: $\mathfrak{B}_{\mu,\mu} > \mathfrak{A}_{0,0}^2 - (\frac{1}{2}\mathfrak{A}_{0,0})^2$ ou $> \frac{3}{4}\mathfrak{A}_{0,0}^2$,

2°. si $\mathfrak{A}_{0,0}$ est impair: $\mathfrak{B}_{\mu,\mu} > \mathfrak{A}_{0,0}^2 - (\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_{0,0}-1))^2$.

Or en général, soit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$, etc. la suite des formes d'ordre $n+1$, n, $n-1$, $n-2$, etc., qu'on obtient en prenant, pour $\mathfrak{G}$, la dérivée réduite de $\mathfrak{F}$, pour $\mathfrak{N}$, la dérivée réduite de $\mathfrak{G}$, pour $\mathfrak{R}$, la dérivée réduite de $\mathfrak{N}$ etc. Nommons respectivement $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. les plus petits coefficients des carrés de variables dans ces formes, et D, D_0, D_{01}, D_{02} etc. leurs divers déterminants. On aura d'abord:

$$D_0 = \mathfrak{A}^{n-1}D, \qquad D_{01} = \mathfrak{B}^{n-1}D_0, \qquad D_{02} = \mathfrak{C}^{n-3}D_{01}, \quad \text{etc.}$$

puis on obtiendra la série des limites supérieures:

$$\mathfrak{A} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}, \qquad \mathfrak{B} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D_0}, \qquad \mathfrak{C} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n+1]{D_{01}}, \quad \text{etc.}$$

et suivant les deux cas, l'une ou l'autre des limites inférieures suivantes:

$$\mathfrak{B} > \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}^2, \qquad \mathfrak{C} > \tfrac{3}{4}\mathfrak{B}^2, \qquad \mathfrak{D} > \tfrac{3}{4}\mathfrak{C}^2, \quad \text{etc.}$$

ou

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{A}^2 - (\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}-1))^2, \quad \mathfrak{C} > \mathfrak{B}^2 - (\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}-1))^2, \quad \mathfrak{D} > \mathfrak{C}^2 - (\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}-1))^2, \quad \text{etc.}$$

L'exemple des formes de déterminant 1, que je vais traiter, montrera l'utilité de ces formules. Dans ce cas on a en général:

$$\mathfrak{A} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n},$$

ainsi depuis les formes binaires jusqu'aux formes quinaires inclusivement, $\mathfrak{A} < 2$, donc $\mathfrak{A} = 1$, et depuis les formes à six indéterminées jusqu'à celles qui n'en comprennent pas plus de huit, $\mathfrak{A} > 3$, donc $\mathfrak{A} = 1$ ou $\mathfrak{A} = 2$. Or on va voir que cette seconde valeur doit être rejetée.

Considérons d'abord les formes à *six* indéterminées, on trouve:

1°. pour $\mathfrak{A}$ la limite supérieure: $(\frac{4}{3})^{\frac{5}{2}} = 2,05\ldots$, donc $\mathfrak{A} = 2$

2°. pour $\mathfrak{B}$ id. $(\frac{4}{3})^2 \sqrt[5]{2^4} = 3,09\ldots$, donc $\mathfrak{B} = 3$

3°. pour $\mathfrak{C}$ id. $(\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{(2^4 3^3)} = 7,01\ldots$, donc $\mathfrak{C} = 7$.

Il est inutile d'aller plus loin, puisque la valeur de $\mathfrak{C}$, est en contradiction avec la limite $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}^2 - (\frac{1}{2}(\mathfrak{B}-1))^2$, il faut donc exclure déjà dans ce cas la valeur $\mathfrak{A} = 2$.

Passons aux formes à 7 indéterminées, il viendra

1°. pour $\mathfrak{A}$ la limite supérieure: $(\frac{4}{3})^3 = 2{,}36\ldots$, donc $\mathfrak{A} = 2$

2°. pour $\mathfrak{B}$ id. $(\frac{4}{3})^{\frac{5}{2}}\sqrt[6]{2^5} = 3{,}65\ldots$, donc $\mathfrak{B} = 3$

3°. pour $\mathfrak{C}$ id. $(\frac{4}{3})^2\sqrt[5]{(2^5 3^4)} = 7{,}50\ldots$, donc $\mathfrak{C} = 7$;

pour la même raison que précédemment, $\mathfrak{A} = 2$, doit encore être rejeté.

Enfin le cas des formes à 8 indéterminées donne

1°. pour $\mathfrak{A}$ la limite supérieure: $(\frac{4}{3})^7 = 2{,}73\ldots$, donc $\mathfrak{A} = 2$

2°. pour $\mathfrak{B}$ id. $(\frac{4}{3})^3\sqrt[7]{2^6} = 4{,}29\ldots$, donc $\mathfrak{B} = 4$

3°. pour $\mathfrak{C}$ id. $(\frac{4}{3})^{\frac{5}{2}}\sqrt[6]{(2^6.4^5)} = 13{,}03\ldots$, donc $\mathfrak{C} = 13$

4°. pour $\mathfrak{D}$ id. $(\frac{4}{3})^2\sqrt[5]{(2^6.4^5.13^4)} = 127{,}4\ldots$, donc $\mathfrak{D} = 127$,

la valeur obtenue pour $\mathfrak{D}$ est en contradiction avec la limite inférieure $\mathfrak{C}^2 - (\frac{1}{2}(\mathfrak{C}-1))^2 = 133$. Donc, comme dans les cas précédent, il n'existe que la seule valeur $\mathfrak{A} = 1$, et voici maintenant, les conséquences qui s'en déduisent.

En premier lieu, pour toutes les formes définies de déterminant 1, dont le nombre des indéterminées ne surpasse pas 8, la dérivée réduite a encore l'unité pour déterminant. Soit donc

$$\mathfrak{F} = \Sigma\Sigma\mathfrak{A}_{i,j}x_i x_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{G} = \Sigma\Sigma\mathfrak{B}_{i,j}x_i x_j$$

une forme et sa dérivée réduites, toutes deux ayant l'unité pour déterminant. Admettons que pour les formes $\mathfrak{G}$, dont l'ordre est inférieur d'une unité, on ait $\mathfrak{B}_{i,i} = 1$ et $\mathfrak{B}_{i,j} = 0$ lorsque i est différent de j, les deux conditions

$$\mathfrak{A}_{0,0} = 1, \quad \mathfrak{A}_{0,i} < \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{0,0}$$

donneront d'abord, $\mathfrak{A}_{0,i} = 0$, et l'équation

$$\mathfrak{B}_{i,j} = \mathfrak{A}_{0,0}\mathfrak{A}_{i,j} - \mathfrak{A}_{0,i}\mathfrak{A}_{0,j}$$

conduira successivement, pour $i = j$ et i différent de j, aux deux valeurs:

$$\mathfrak{A}_{i,i} = 1, \quad \mathfrak{A}_{i,j} = 0.$$

Or les formes définies binaires réduites, offrant la seule classe $x^2 + y^2$ de déterminant 1, on en conclut que pour les formes ternaires, quaternaires, etc. jusqu'à celle de huit indéterminées, il n'existera pareillement qu'une seule classe représentée successivement par une somme de 3, 4, ... 8 carrés.

Je n'essayerai pas, Monsieur, de Vous développer encore d'autres applications particulières de ma méthode de réduction. Au reste les formes réduites auxquelles on est ainsi conduit, pour un déterminant donné, n'offrent plus ce caractère propre aux formes binaires, de ne pouvoir être équivalentes

entre elles, à moins d'être identiques, aux signes près de certains coefficients; seulement on peut démontrer que la limite du nombre des formes réduites équivalentes ne dépend que du nombre des indéterminées, et nullement de la valeur particulière du déterminant. Mais permettez-moi, Monsieur, de revenir un instant sur les circonstances remarquables, auxquelles donne lieu la réduction des formes dont les coefficients dépendent de racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Peut-être parviendra-t-on à déduire de là, un système complet de caractères pour chaque espèce de ce genre de quantités, analogue par exemple à ceux que donne la théorie des fractions continues pour les racines des équations du second degré. On ne peut du moins faire concourir trop d'éléments pour jeter quelque lumière sur cette variété infinie des irrationnelles algébriques, dont les symboles d'extraction de racines, ne nous représentent que la plus faible partie. Ici comme dans la théorie des transcendantes, il a été facile de trouver à une longue suite de notions analytiques de plus en plus complexes, une origine commune, une définition unique et complète, où n'entrent que les premiers éléments du calcul; mais quelle tâche immense, pour la théorie des nombres, et le calcul intégral, de pénétrer dans la nature d'une telle multiplicité d'êtres de raison, en les classant en groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement, par des définitions caractéristiques et élémentaires?

L'exemple le plus simple auquel puisse s'appliquer ma méthode de réduction, est celui des racines cubiques des nombres entiers. En désignant donc par α la valeur réelle, et par β et γ les deux valeurs imaginaires de $\sqrt[3]{A}$, on sera conduit d'après le point de vue auquel je me suis placé, à réduire pour toutes les valeurs de la quantité Δ, croissantes depuis zéro jusqu'à l'infini, la forme ternaire

$$f = (x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z)$$

dont le déterminant $D = \frac{27}{4}\Delta^2 A^2$. Soit dans l'hypothèse d'une valeur donnée quelconque de Δ, que je représenterai par Δ_0, la substitution correspondante:

$$\begin{aligned} x &= mX+nY+pZ \\ y &= m'X+n'Y+p'Z \\ z &= m''X+n''Y+p''Z, \end{aligned}$$

en posant pour abréger:

$$\begin{array}{lll} M(\alpha) = m+\alpha m'+\alpha^2 m'' & N(\alpha) = n+\alpha n'+\alpha^2 n'' & P(\alpha) = p+\alpha p'+\alpha^2 p'' \\ M(\beta) = m+\beta m'+\beta^2 m'' & N(\beta) = n+\beta n'+\beta^2 n'' & P(\beta) = p+\beta p'+\beta^2 p'' \\ M(\gamma) = m+\gamma m'+\gamma^2 m'' & N(\gamma) = n+\gamma n'+\gamma^2 n'' & P(\gamma) = p+\gamma p'+\gamma^2 p'', \end{array}$$

f deviendra:

$$F = (XM(\alpha)+YN(\alpha)+ZP(\alpha))^2$$
$$+\Delta(XM(\beta)+YN(\beta)+ZP(\beta))(XM(\gamma)+YN(\gamma)+ZP(\gamma)).$$

Soit encore

$$(1.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = M^2(\alpha)+\Delta M(\beta)M(\gamma) \\ \mathfrak{N} = N^2(\alpha)+\Delta N(\beta)N(\gamma) \\ \mathfrak{P} = P^2(\alpha)+\Delta P(\beta)P(\gamma), \end{cases}$$

on aura d'après le caractère principal des formes définies réduites:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P} < (\tfrac{4}{3})^3 D \quad \text{ou} \quad < (4A\Delta)^2,$$

d'où en supposant $\mathfrak{M}<\mathfrak{N}<\mathfrak{P}$:

$$(2.)\qquad \mathfrak{M}<(4A\Delta)^{\frac{2}{3}},\quad \mathfrak{M}^2\mathfrak{N}<(4A\Delta)^2;\quad \mathfrak{M}^2\mathfrak{P}<(4A\Delta)^2.$$

Or de là résultent plusieurs propriétés essentielles que je vais d'abord établir.

En premier lieu, le nombre entier

$$\Omega = M(\alpha)M(\beta)M(\gamma)$$

vérifie la condition

$$\Omega < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} A;$$

car d'après la première des équations (1.), le produit des deux facteurs $M(\alpha)$, $\Delta M(\beta)M(\gamma)$ ne peut dépasser son maximum $\frac{2}{3}\mathfrak{M}\sqrt{(\frac{1}{3}\mathfrak{M})}$, d'où se tire la limite indiquée.

Secondement, les deux polynomes à coefficients entiers, savoir

$$\Phi(\alpha) = N(\alpha)M(\beta)M(\gamma),\qquad \Psi(\alpha) = P(\alpha)M(\beta)M(\gamma),$$

qui sont respectivement de la forme

$$\Phi(\alpha) = \varphi+\alpha\varphi'+\alpha^2\varphi'',\qquad \Psi(\alpha) = \psi+\alpha\psi'+\alpha^2\psi'',$$

ont de même leurs coefficients limités. En effet, on a d'après les relations (1.):

$$N(\alpha) < \sqrt{\mathfrak{N}},\qquad \Delta M(\beta)M(\gamma) < \mathfrak{M},$$

donc

$$\Delta\Phi(\alpha) < \mathfrak{M}\sqrt{\mathfrak{N}},$$

et par la seconde des équations (2.):

$$\Phi(\alpha) < 4A,$$

et on aura de même:

$$\Psi(\alpha) < 4A.$$

Soit ensuite, puisque β et γ sont deux imaginaires conjuguées:

$$\Phi(\beta) = \varrho e^{\theta\sqrt{-1}},\quad \Phi(\gamma) = \varrho e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\varrho^2 = \Phi(\beta)\Phi(\gamma) = N(\beta)N(\gamma).M^2(\alpha)M(\beta)M(\gamma).$$

La seconde des équations (1.) donne d'abord

$$\Delta.N(\beta)N(\gamma) < \mathfrak{N},$$

on tire ensuite de la première,

$$M^2(\alpha).\Delta M(\beta)M(\gamma) < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2,$$

et on en conclut la limite

$$\varrho < 2A.$$

Ainsi on peut poser, en désignant par ε et η des quantités comprises entre $+1$ et -1:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= \varphi+\alpha\varphi'+\alpha^2\varphi'' = 4A.\varepsilon\\
\Phi(\beta) &= \varphi+\beta\varphi'+\beta\,\varphi'' = 2A.\eta.e^{\theta\sqrt{-1}}\\
\Phi(\gamma) &= \varphi+\gamma\varphi'+\gamma^2\varphi'' = 2A\eta.e^{-\theta\sqrt{-1}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
3\varphi &= 4A(\varepsilon+\eta\cos\theta), &&\text{donc}\quad \varphi < \tfrac{8}{3}A\\
3\varphi' &= 4\sqrt[3]{A^2}(\varepsilon+\eta\cos(\theta+\tfrac{2}{3}\pi)) &&\qquad\quad \varphi' < \tfrac{8}{3}\sqrt[3]{A^2}\\
3\varphi'' &= 4\sqrt[3]{A}(\varepsilon+\eta\cos(\theta-\tfrac{2}{3}\pi)) &&\qquad\quad \varphi'' < \tfrac{8}{3}\sqrt[3]{A},
\end{aligned}$$

et on obtiendrait des limites semblables pour les coefficients du polynome Ψ, lesquels donnent lieu d'ailleurs à la condition remarquable:

$$\varphi'\psi''-\varphi''\psi' = \pm\Omega.$$

Celà posé, d'après tout ce qui vient d'être établi, nous représenterons la transformée déduite de la substitution effectuée dans f, non plus par F, mais par $\frac{F}{M^2(\alpha)} = \mathfrak{F}$, forme évidemment réduite en même temps que F et que j'écrirai ainsi:

$$\mathfrak{F} = \left(X+\frac{N(\alpha)}{M(\alpha)}Y+\frac{P(\alpha)}{M(\alpha)}Z\right)^2$$
$$+\Delta\frac{M(\beta)M(\gamma)}{M^2(\alpha)}\left(X+\frac{N(\beta)}{M(\beta)}Y+\frac{P(\beta)}{M(\beta)}Z\right)\left(X+\frac{N(\gamma)}{M(\gamma)}Y+\frac{P(\gamma)}{M(\gamma)}Z\right),$$

ou bien:

$$\mathfrak{F} = \left(X+\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}Z\right)^2$$
$$+\frac{\Delta\Omega}{M^2(\alpha)}\left(X+\frac{\Phi(\beta)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}Z\right)\left(X+\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}Z\right).$$

Or, Δ croissant d'une manière continue à partir de Δ_0, nommons, Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. la série des valeurs auxquelles viennent successivement correspondre des formes réduites distinctes, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ etc. Toutes ces formes seront comprises dans le même type que $\mathfrak{F}$, mais on peut concevoir que l'une quelconque d'entre elles soit obtenue au moyen de la précédente, en y introduisant la valeur de Δ, à partir de laquelle elle cesse d'être une forme réduite, puis lui appliquant la méthode générale de réduction. En procédant ainsi, le calcul relatif à la série entière des valeurs de Δ, est ramené à un nombre limité d'opérations. En effet, le nombre entier désigné d'une manière générale par Ω et les coefficients entiers des polynomes Φ et Ψ, ayant des limites finies, on arrivera nécessairement à deux valeurs de Δ, Δ_i et $\Delta_{i'}$, auxquelles correspondront deux formes, $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}_{i'}$, qui représenteront absolument la même combinaison de ces quantités. Faisant donc croître Δ, dans $\mathfrak{F}_i$, à partir de la limite $\Delta_{i'}$ on verra se reproduire, dans le même ordre, les divers termes $\mathfrak{F}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_{i+2}$, .. de la suite obtenue pour le premier intervalle de Δ_i à $\Delta_{i'}$, et jusqu'à la limite extrême des valeurs de Δ, l'ensemble des formes réduites sera cette série d'un nombre fini de formes, reproduite une infinité de fois.

En la considérant d'ailleurs dans l'ordre inverse, elle offrirait le résultat d'un système d'opérations où l'on aurait fait décroître la quantité Δ d'une manière continue depuis $\Delta_{i'}$ jusqu'à Δ_i; l'ensemble des formes correspondantes aux valeurs indéfiniment décroissantes de Δ, sera donc encore la même suite prolongée à l'infini dans un sens opposé.

Si ce n'est pas trop présumer de Votre indulgence et que j'aurai réussi à Vous intéresser un peu à ces recherches, je m'estimerais bien heureux, de Vous adresser encore ce qu'il pourra m'arriver de rencontrer dans la même voie. Après avoir prouvé que les propriétés précédentes sont caractéristiques pour les racines de toutes les équations du 3[e] degré à coefficients entiers, je me suis arrêté à quelques recherches sur l'équation $M(\alpha)M(\beta)M(\gamma)=1$ dont je pense obtenir la solution complète. Mais je désirerais surtout pouvoir Vous soumettre un travail sur les équations modulaires, dans lequel j'ai établi une proposition énoncée dans les oeuvres posthumes de *Galois*, imprimées dans le journal de Mathématiques, et qui consiste en ce que les équations modulaires du 6°, 8[e] et 12[e] degré, peuvent être abaissées respectivement au 5°, 7° et 11° degré. Je me suis proposé en même temps de retrouver ces relations si singulières que Vous avez le premier découvertes, entre les racines

M, M', M'', .. de l'équation $F(k, M) = 0$, mais je n'ai pu y réussir malgré tous mes efforts. Ces premières propriétés d'irrationnelles algébriques non exprimables par radicaux, me paraissent du plus grand intérêt; comme les propriétés des racines des équations relatives à la division du cercle, elles serviront de point de départ pour pénétrer plus avant dans la théorie générale des équations. Ne publierez-Vous donc pas un jour, Monsieur, les principes si cachés qui Vous ont conduit à ces beaux théorèmes? Il me semble que ce serait encore une voie nouvelle que Vous ouvririez aux recherches des géomètres, dans une des théories les plus vastes et les plus difficiles.

Troisième lettre.

Je dois à l'obligeance de M. ***Borchardt,*** d'avoir reçu Votre dernière lettre qui m'a été bien précieuse, en portant à ma connaissance l'écrit de M. ***Gauss*** sur les formes quadratiques ternaires. Permettez moi de Vous remercier aussi de toutes les autres indications que Vous avez eu la bonté de me donner, mais dont mon ignorance de la langue Allemande m'empêche malheureusement de profiter comme je le souhaiterais. C'est M. ***Borchardt,*** lui-même, qui a bien voulu me traduire l'article de M. ***Gauss,*** mais jusqu'ici je n'ai pu trouver personne pour me continuer le même service et, à mon grand regret, je reste complétement étranger aux travaux de M. ***Kummer,*** sur les nombres complexes, qui m'intéresseraient vivement.

Comme Vous le savez, Monsieur, le but de mes premières recherches avait été d'examiner le nouveau mode d'approximation que Vous avez donné en établissant l'impossibilité d'une fonction à trois périodes imaginaires. Ce n'est que long-temps après que j'ai vu comment cette question, et une infinité d'autres du même genre, dépendaient de la réduction des formes quadratiques. Mais une fois arrivé à ce point de vue, les problèmes si vastes que j'avais cru me proposer, m'ont semblé peu de chose à côté des grandes questions de la théorie des formes, considérée d'une manière générale. Dans cette immense étendue de recherches qui nous a été ouverte par M. ***Gauss,*** l'Algèbre et la Théorie des Nombres, me paraissent devoir se confondre dans un même ordre de notions analytiques, dont nos connaissances actuelles ne nous permettent pas encore de nous faire une juste idée. Peut-être, cependant, doit-on entrevoir qu'il appartiendra à cette partie de la science, constituée ainsi sur ses véritables bases, d'offrir le tableau de tous les éléments, en nombre fini ou illimité, dont dépendent les racines des équations algébriques, séparés en types irréductibles et classés suivant leurs rapports naturels.

Je ne sais si j'aurai réussi à faire un premier pas vers un but si éloigné, en donnant une méthode pour la réduction des formes binaires de

degré quelconque *). J'essayerai plus tard de poursuivre, sous ce point de vue, les conséquences des résultats que j'ai obtenus, mais jusqu'à présent, j'ai été plutôt préoccupé de la recherche des principes propres à la réduction des formes les plus générales composées d'un nombre quelconque de variables, question capitale et qui peut-être sera bien au dessus de mes forces. Voici néanmoins sur ce sujet un premier théorème destiné à présenter, dans le sens le plus étendu, la notion des formes adjointes de M. *Gauss*.

Soit

$$(1.)\qquad X = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

l'expression générale d'une fonction homogène du m^e degré à n variables. Faisons

$$(2.)\qquad \frac{dX}{dx_1} = y_1,\quad \frac{dX}{dx_2} = y_2,\quad \ldots\quad \frac{dX}{dx_n} = y_n;$$

par l'élimination de $x_1, x_2, \ldots x_n$, on arrivera à une équation

$$\Pi(X, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0.$$

Cela étant, les coefficients des diverses puissances de X seront ce que j'appellerai, ***les formes des divers degrés adjointes à*** $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, et je les désignerai généralement, en supposant égal à l'unité le coefficient de la puissance la plus élevée de X, par

$$g(y_1, y_2, \ldots y_n).$$

Or on aura le théorème suivant, comme conséquence immédiate de la définition qu'on vient de proposer:

La fonction homogène $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ devenant $F(X_1, X_2, \ldots X_n)$, par la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \\ x_2 &= b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_n X_n, \end{aligned}$$

si l'on désigne par G la forme adjointe, composée avec les coefficients de F, comme g est composée avec les coefficients de f, on aura

$$g(y_1, y_2, \ldots y_n) = G(Y_1, Y_2, \ldots Y_n),$$

en prenant

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2 + \cdots + l_1 y_n \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + l_2 y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= a_n y_1 + b_n y_2 + \cdots + l_n y_n. \end{aligned}$$

*) *Crelle* Journal t. XXXVI p. 357.

Mais il importait surtout d'obtenir le résultat général de l'élimination des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, entre les équations (1.) et (2.). Voici comment on peut y parvenir.

Soit

$$\varphi = X^{m-1}.f(x_1, x_2, \ldots x_n) - \frac{(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^m}{m^m}$$

une nouvelle fonction homogène du m^e degré de $x_1, x_2, \ldots x_n$; j'observe qu'au moyen des équations proposées, les suivantes ont lieu, savoir

$$\varphi = 0$$

et

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Elles se réduisent en effet à des identités, en mettant à la place de X, d'une part, et de $y_1, y_2, \ldots y_n$, de l'autre, leurs valeurs en $x_1, x_2, \ldots x_n$, telles que les donnent les équations (1.) et (2.). Donc la question est ramenée à l'élimination de $x_1, x_2, \ldots x_n$ entre les équations homogènes:

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

car l'équation $\varphi = 0$ rentre dans celles-là, et on peut l'omettre.

Ainsi, représentant la forme f, par la somme des valeurs du produit

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}.A_{i_1, i_2, \ldots i_n},$$

lorsqu'on attribue aux quantités i tous les systèmes de valeurs entières et positives qui vérifient la condition

$$i_1+i_2+\cdots+i_n = m,$$

et désignant par

$$\mathfrak{F} = 0,$$

la relation entre les coefficients A qui résulte de l'élimination de $x_1, x_2, \ldots x_n$ entre les équations

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{df}{dx_n} = 0,$$

on aura le théorème suivant:

L'équation

$$\Pi(X, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$$

s'obtiendra, en remplaçant $A_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ dans

$$\mathfrak{F} = 0$$

par

$$X^{m-1}.A_{i_1,i_2,\ldots i_n}-(i_1,i_2,\ldots i_n)\frac{y_1^{i_1}y_2^{i_2}\ldots y_n^{i_n}}{m^m},$$

$(i_1, i_2, \ldots i_n)$ étant le coefficient numérique de $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\ldots y_n^{i_n}$, dans le développement de la puissance polynomiale $(y_1+y_2+\cdots+y_n)^m$.

On observera seulement qu'il y aura lieu de supprimer comme facteur étranger, une certaine puissance de X, ce qui n'altère en rien la forme analytique du résultat que je viens d'obtenir.

L'application aux formes quadratiques est bien simple. La forme proposée étant

$$f=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j a_{i,j}x_ix_j,$$

sous la condition ordinaire

$$a_{i,j}=a_{j,i},$$

la forme adjointe g, sera

$$g=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j\frac{dD}{da_{i,j}}y_iy_j,$$

D étant le déterminant de la forme f.

Je prendrai encore comme exemple, les formes cubiques binaires:

$$f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+ey^3.$$

Dans ce cas, l'expression désignée par $\mathfrak{F}$, coïncide avec le déterminant unique de la forme, tel que je l'ai obtenu dans la théorie de la réduction, et le coefficient du second terme de l'équation en X, donne la forme adjointe:

$$\frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{d\mathfrak{F}}{da}x^3+\frac{d\mathfrak{F}}{db}x^2y+\frac{d\mathfrak{F}}{dc}xy^2+\frac{d\mathfrak{F}}{de}y^3\right)$$

$$=\frac{1}{\mathfrak{F}}\{(ae^2-3bce+2c^3)x^3-3(ace-2b^2e+bc^2)x^2y$$
$$+3(2ac^2-abe-b^2c)xy^2-(3abc-a^2e-2b^3)y^3\}.$$

En étudiant cette forme que je trouve dans un des mémoires de M. *Eisenstein*, j'ai reconnu qu'elle se déduisait de f, en y remplaçant les variables par les deux expressions linéaires:

$$\frac{d\Phi}{dx},\quad \frac{d\Phi}{dy},$$

Φ étant l'expression quadratique:

$$(ac-b^2)y^2-(ae-bc)xy+(be-c^2)x^2,$$

considérée encore par M. ***Eisenstein***, et par moi-même dans la note du journal de M. ***Crelle***, sous la forme:

$$(\alpha-\beta)^2(y-\gamma x)^2+(\beta-\gamma)^2(y-\alpha x)^2+(\gamma-\alpha)^2(y-\beta x)^2,$$

α, β, γ étant les racines de l'équation,

$$ax^3+3bx^2+3cx+e = 0.$$

Maintenant, Monsieur, je reviens à la théorie des formes quadratiques, pour essayer de Vous compléter quelques points de la dernière lettre que j'ai eu l'honneur de Vous écrire. Et d'abord, j'ai dû reconnaître que ce qu'on devait se proposer avant tout, dans la théorie de la réduction, était de découvrir les valeurs entières des indéterminées pour lesquelles une forme définie donnée, était ***la plus petite possible***. De là en effet, se tireraient les conséquences suivantes:

1°. En cherchant la série des *minima* de la forme binaire

$$(y-ax)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

pour toutes les valeurs positives de la quantité Δ croissant d'une manière continue de zéro à l'infini, *les diverses fractions $\frac{y}{x}$ représenteraient l'ensemble des réduites de la fraction continue équivalente à a.*

2°. En cherchant de même la série des *minima* de la forme ternaire:

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

où A et B sont deux quantités positives quelconques, a et b deux quantités réelles, *toutes les fractions $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, auraient ce caractère essentiel qu'en choisissant un dénominateur x_0 moindre que x, deux autres fractions, $\frac{z_0}{x_0}$, $\frac{y_0}{x_0}$, donneraient nécessairement:*

$$A(z_0-ax_0)^2+B(y_0-bx_0)^2 > A(z-ax)^2+B(y-bx)^2.$$

Car si cette inégalité n'avait pas lieu, l'expression

$$A(z_0-ax_0)^2+B(y_0-bx_0)^2+\frac{x_0^2}{\Delta}$$

serait moindre que

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta};$$

donc cette derniere ne serait pas, comme on l'a suppose, un *minimum*.

Cela étant, si l'on observe qu'on peut toujours faire:

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta}<\sqrt[3]{\left(\frac{2AB}{\Delta}\right)},$$

et *a fortiori:*

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2<\sqrt[3]{\left(\frac{2AB}{\Delta}\right)},$$

on voit qu'en faisant croître continuellement Δ, la série des fractions $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, converge indéfinément vers les limites a et b et que, pour chaque approximation, la somme des carrés des erreurs $z-ax$, $y-bx$, multipliés par les constantes A et B, est un ***minimum***, c. à d. que cette somme augmente, si le dénominateur commun x diminue.

Ce qui précède, indique suffisamment une infinité d'autres conséquences analogues, qui toutes viennent dépendre de la recherche difficile, d'une limite précise du ***minimum*** d'une forme définie quelconque. Là-dessus je ne puis former qu'une conjecture. Mes premières recherches, dans le cas d'une forme à n variables de déterminant D, m'avaient donné la limite $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D}$, je suis porté à présumer, mais sans pouvoir le démontrer, que le coefficient numérique $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}$ doit être remplacé par $\frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)}}$.

Comme application des mêmes principes, je considérerai encore la question suivante:

Étant donnée une expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$: déterminer les entiers complexes $x+y\sqrt{-1}$, $t+u\sqrt{-1}$, pour lesquels la norme de

$$(x+y\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})-(t+u\sqrt{-1})$$

soit la plus petite possible, sous la condition que x^2+y^2 soit au dessous d'une certaine limite.

On cherchera les minima successifs de la forme à ***quatre*** variables:

$$f=(ax-by-t)^2+(ay+bx-u)^2+\frac{x^2+y^2}{\Delta},$$

pour toutes les valeurs de Δ, les diverses fractions complexes,

$$\frac{t+u\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}},$$

auxquelles on parviendra ainsi, jouiront de cette propriété caractéristique, ***que***

le module de la différence:

$$a+b\sqrt{-1}-\frac{t+u\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}$$

croîtra nécessairement en prenant toute autre fraction dont le dénominateur aurait un module moindre.

Mais une autre propriété de ces fractions, les rapprochera encore d'avantage des réduites de la théorie des fractions continues.

Soient

$$\frac{t+u\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}},\quad \frac{t_0+u_0\sqrt{-1}}{x_0+y_0\sqrt{-1}},$$

deux fractions différentes qui correspondent à deux *minima* consécutifs de la forme f, de sorte que les deux valeurs de Δ qui ont donné lieu à ces deux fractions, soient *infiniment peu* différentes l'une de l'autre. Alors, en observant que le déterminant de f est en général $\frac{1}{\Delta^2}$, le premier minimum donnera, en admettant la conjecture ci-dessus,

$$(ax-by-t)^2+(ay+bx-u)^2+\frac{x^2+y^2}{\Delta}<\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$

et le second:

$$(ax_0-by_0-t_0)^2+(ay_0+bx_0-u_0)^2+\frac{x_0^2+y_0^2}{\Delta+\omega}<\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta+\omega)}},$$

ω désignant une quantité aussi petite qu'on voudra. Cela posé, multiplions ces deux inégalités, membre à membre, on trouvera, en employant une formule bien connue *):

---

*) La formule d'*Euler* qui donne sous une forme de quatre carrés, le produit de deux sommes de 4 carrés, suit immédiatement de ce que le produit des deux déterminants $(ad-bc).(a'd'-b'c')$, est le déterminant du système

$$\begin{bmatrix} aa'+bc', & ab'+bd' \\ ca'+dc', & cb'+dd' \end{bmatrix}.$$

En effet, il suffit de supposer:

$$a=p+q\sqrt{-1},\quad b=r+s\sqrt{-1},\quad c=-r+s\sqrt{-1},\quad d=p-q\sqrt{-1},$$
$$a'=p'+q'\sqrt{-1},\quad b'=r'+s'\sqrt{-1},\quad c'=-r'+s'\sqrt{-1},\quad d'=p'-q'\sqrt{-1},$$

pour obtenir:

$$\begin{aligned}&(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)\\ &=(pp'-qq'-rr'-ss')^2+(pq'+qp'+rs'-sr')^2\\ &+(pr'-qs'+rp'+sq')^2+(ps'+qr'+p's-q'r)^2.\end{aligned}$$

Celle de *Lagrange* vient en mettant $q\sqrt{A}$, $r\sqrt{B}$, $s\sqrt{AB}$ etc. au lieu de q, r, s etc.

$$\left\{(ax-by-t)(ax_0-by_0-t_0)+(ay+bx-u)(ay_0+bx_0-u_0)+\frac{xx_0+yy_0}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$+\left\{-(ax-by-t)(ay_0+bx_0-u_0)+(ax_0-by_0-t_0)(ay+bx-u)+\frac{yx_0-y_0x}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{(\sqrt{(\Delta+\omega)}-\sqrt{\Delta})(a(yy_0-xx_0)+b(x_0y+xy_0)+t_0x-u_0y)+\sqrt{\Delta}(uy_0-u_0y+t_0x-x_0t)}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{(\sqrt{(\Delta+\omega)}-\sqrt{\Delta})(a(yx_0+xy_0)+b(xx_0-yy_0)-t_0y-u_0x)+\sqrt{\Delta}(ty_0-t_0y+ux_0-u_0x)}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$<\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}},$$

d'où en négligeant les deux premiers carrés et introduisant la condition que ω est infiniment petit:

$$(uy_0-u_0y+t_0x-x_0t)^2+(ty_0-t_0y+ux_0-u_0x)^2<\frac{4}{\sqrt{5}}$$

et par conséquent:

$$(uy_0-u_0y+t_0x-x_0t)^2+(ty_0-t_0y+ux_0-u_0x)^2=1.$$

Ainsi, la norme du numérateur de la différence de deux fractions complexes consécutives est *l'unité*: on eût obtenu *l'unité* ou le nombre *deux*, en employant dans l'expression du minimum de f, le facteur $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$ au lieu du coefficient hypothétique $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$.

La méthode précédente s'applique encore aux nombres complexes $x+y\sqrt{-n}$, dont la théorie est plus difficile et sur laquelle je me propose de revenir. Mais ce n'est qu'au moyen de la réduction de formes de degrés plus élevés qu'on pourra résoudre les questions analogues à la précédente dans lesquelles entreraient, les nombres complexes *réels* $x+y\sqrt{n}$ et ceux qui dépendent d'irrationnelles numériques plus compliquées que les radicaux carrés.

Voici maintenant une autre série de questions importantes dont la solution dépend encore de la recherche du minimum d'une forme quadratique et qu'on peut comprendre dans cet énoncé général:

> *Trouver, en nombres entiers, le minimum du produit d'un certain nombre de fonctions linéaires et homogènes, à coefficients réels ou imaginaires.*

Nommons

$$f_1,\ f_2,\ \dots\ f_n$$

les fonctions linéaires à coefficients réels,

$$g_1,\ g_2,\ \dots\ g_{n'};\quad h_1,\ h_2,\ \dots\ h_{n'}$$

les fonctions à coefficients imaginaires, g_i et h_i étant des fonctions conjuguées. Si l'on suppose que leur produit prenne la plus petite valeur possible en attribuant aux indéterminées les valeurs entières $x = x_0$, $y = y_0$ etc. et qu'on désigne alors par

$$f_1^0,\ f_2^0,\ \ldots\ f_n^0,$$

ce que deviennent les facteurs linéaires réels, et de même par

$$g_1^0,\ h_1^0;\ g_2^0,\ h_2^0;\ \ldots\ g_{n'}^0,\ h_{n'}^0,$$

les diverses couples de facteurs conjugués, *je dis que la forme quadratique*

$$\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2+\left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2$$
$$+2\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}+2\frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}+\cdots+2\frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0},$$

sera elle même la plus petite possible, pour $x = x_0$, $y = y_0$, *etc.*

Supposons en effet qu'on puisse avoir

$$\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2+\left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2$$
$$+2\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}+2\frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}+\cdots+2\frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0} = \mathrm{M},$$

M étant moindre que $n+2n'$, comme le produit des facteurs:

$$(a.)\qquad \left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2\left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2\cdots\left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2,\quad \left(\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}\right)^2\left(\frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}\right)^2\cdots\left(\frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0}\right)^2$$

sera toujours inférieur à son *maximum*

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{n+2n'}\right)^{n+2n'},$$

la supposition de $\mathrm{M} < n+2n'$ conduirait à

$$f_1f_2\ldots f_n\cdot g_1h_1\cdot g_2h_2\ldots g_{n'}h_{n'} < f_1^0f_2^0\ldots f_n^0\cdot g_1^0h_1^0\cdot g_2^0h_2^0\ldots g_{n'}^0h_{n'}^0$$

et par suite, le produit des facteurs linéaires ne serait pas, contre l'hypothèse, le plus petit possible pour $x = x_0$, $y = y_0$, etc. J'ajoute qu'en faisant $\mathrm{M} = n+2n'$, le produit $(a.)$ ne pourra atteindre son maximum ou l'unité qu'autant qu'on aura:

$$\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2=1,\quad \left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2=1,\ \ldots\ \left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2=1,$$
$$\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}=1,\quad \frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}=1,\ \ldots\ \frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0}=1.$$

Nous voici donc encore conduit, comme Vous le voyez, Monsieur, à cette recherche singulière ***de tous les minima, d'une forme quadratique, correspondants aux divers systèmes de valeurs de plusieurs paramètres qu'il faudra supposer passer par tous les états possibles de grandeur.*** Telle est du moins la voie qui nous est ouverte, par l'analyse précédente, pour la solution de nombreuses questions, parmi lesquelles je choisirai celle-ci:

> $\varphi(\alpha)$ désignant un nombre entier complexe, composé avec une racine α de l'équation $F(x) = 0$ à coefficients entiers, celui du premier terme étant l'unité, trouver toutes les solutions de l'équation
>
> $$\text{Norme } \varphi(\alpha) = 1.$$

Soit M, un *minimum* d'une quelconque des formes définies

$$\Phi = \left(\frac{\varphi\alpha_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi\alpha_2}{A_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varphi\alpha_n}{A_n}\right)^2 + 2\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{K_1^2} + 2\frac{\varphi\beta_2\,\varphi\gamma_2}{K_2^2} + \cdots + 2\frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{K_{n'}^2},$$

dans lesquelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ désignent les racines réelles et $\beta_1, \gamma_1;\ \beta_2, \gamma_2;\ \ldots\ \beta_{n'}, \gamma_{n'}$, les couples de racines imaginaires de l'équation $F(x) = 0$. En faisant, pour abréger, $n + 2n' = m$, on déduira de la limite

$$M < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(m-1)} . \sqrt[m]{D},$$

où D est le déterminant de Φ, la relation suivante:

$$\text{Norme } \varphi^2(\alpha) < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \frac{\Delta}{m^m}$$

dans laquelle

$$\Delta = F'\alpha_1 F'\alpha_2 \ldots F'\beta_{n'} F'\gamma_{n'},$$

et où n'entrent plus les valeurs de $A_1, A_2, \ldots K_1, K_2$ etc.

Donc, quelles que soient les quantités, $A_1, A_2, \ldots K_{n'}$, le minimum de Φ conduit à une valeur toujours limitée pour la norme de $\varphi\alpha$; mais ce qui a été établi précédemment, fait voir, de plus, qu'en faisant passer $A_1, A_2, \ldots K_1, K_2, \ldots$ par tous les états possibles de grandeur, on obtiendra nécessairement toutes les ***unités complexes,*** toutes les solutions de l'équation:

$$\text{Norme } \varphi\alpha = 1.$$

Considérons une solution particulière telle que N. $\varphi_0(\alpha) = 1$, elle sera donnée par le minimum de Φ, dans l'hypothèse suivante:

$$\Phi = \left(\frac{\varphi\alpha_1}{\varphi_0\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi\alpha_2}{\varphi_0\alpha_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varphi\alpha_n}{\varphi_0\alpha_n}\right)^2 + 2\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{\varphi_0\beta_1\,\varphi_0\gamma_1} + \cdots + 2\frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{\varphi_0\beta_{n'}\,\varphi_0\gamma_{n'}}.$$

Mais ne pourrait-il pas exister deux ou plusieurs autres représentations distinctes du même ***minimum*** et conduisant par suite à de nouvelles solutions?

Observons, à cet effet, qu'on a les conditions

$$\left(\frac{\varphi\alpha_1}{\varphi_0\alpha_1}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\varphi\alpha_2}{\varphi_0\alpha_2}\right)^2 = 1, \quad \ldots \quad \left(\frac{\varphi\alpha_n}{\varphi_0\alpha_n}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{\varphi_0\beta_1\,\varphi_0\gamma_1} = 1, \quad \ldots \quad \frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{\varphi_0\beta_{n'}\,\varphi_0\gamma_{n'}} = 1,$$

déjà établies précédemment, de sorte qu'en supposant l'équation $F(x) = 0$ irréductible, si l'on prend, $\varphi\alpha_1 = \varphi_0\alpha_1$, la même équation aura lieu pour toute autre racine réelle ou imaginaire, et il en serait de même en partant de la condition $\varphi\alpha_1 = -\varphi_0\alpha_1$. Or le premier cas conduit nécessairement à $x = x_0$, $y = y_0$, etc. et le second, à $x = -x_0$, $y = -y_0$, etc.

Mais si toutes les racines étaient imaginaires, la démonstration serait en défaut; dans ce cas on est conduit à détacher de l'ensemble général des solutions, un certain nombre d'entre elles qui offrent ce caractère singulier, de donner lieu *à des entiers complexes dont le module analytique est l'unité.* Ainsi du minimum de la forme

$$\Phi = \frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{\varphi_0\beta_1\,\varphi_0\gamma_1} + \frac{\varphi\beta_2\,\varphi\gamma_2}{\varphi_0\beta_2\,\varphi_0\gamma_2} + \ldots + \frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{\varphi_0\beta_{n'}\,\varphi_0\gamma_{n'}},$$

on déduira non seulement:

$$\varphi\beta_1 = \varphi_0\beta_1, \qquad \varphi\gamma_1 = \varphi_0\gamma_1, \qquad \ldots \varphi\beta_{n'} = \varphi_0\beta_{n'}, \qquad \varphi\gamma_{n'} = \varphi_0\gamma_{n'},$$

mais encore:

$$\varphi\beta_1 = \varphi_0\beta_1 . \psi\beta_1, \ \varphi\gamma_1 = \varphi_0\gamma_1 . \psi\gamma_1, \ \ldots \ \varphi\beta_{n'} = \varphi_0\beta_{n'} . \psi\beta_{n'}, \ \varphi\gamma_{n'} = \varphi_0\gamma_{n'} . \psi\gamma_{n'},$$

les nombres entiers complexes ψ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\psi\beta_1 . \psi\gamma_1 = 1, \quad \psi\beta_2 . \psi\gamma_2 = 1, \quad \ldots \quad \psi\beta_{n'} . \psi\gamma_{n'} = 1,$$

et on pourra en faire abstraction puisqu'ils peuvent être determinés d'avance. J'ai trouvé du moins *qu'ils ne pouvaient être que de cette forme, savoir:*

$$\psi = e^{\frac{2k\pi}{l}\sqrt{-1}},$$

k et l étant entiers. Le dénominateur l est sans doute égal au nombre $2n'+1$, mais je n'ai pu encore suffisamment approfondir toutes ces circonstances qui me paraissent bien singulières.

Quoiqu'il en soit, les considérations qui précèdent, etablissent qu'on n'aura jamais á rechercher qu'une seule représentation en nombres entiers, de chacun des minima distincts qu'offrira la forme Φ, lorsque les quantités

$$A_1, \ A_2, \ \ldots \ A_n, \quad K_1, \ K_2, \ \ldots \ K_{n'}$$

passeront par tous les états possibles de grandeur. Mais une fois amenés à cette nouvelle recherche, il faut recourir à la théorie de la ***réduction*** des formes quadratiques quelconques. Je vais avant tout définir ***ce que j'appelle réduire une forme donnée.***

Soit f cette forme, et f', f'' etc. la série entière de toutes celles qui lui sont équivalentes et que je représenterai, d'une manière générale, par

$$f = \sum_{1}^{n}{}_{j} \sum_{1}^{n}{}_{i} a_{j,i} x_{i,j},$$

en supposant que les coefficients des carrés, rangés par ordre croissant de grandeur, soient

$$a_{1,1}, \quad a_{2,2}, \quad .. \quad a_{n,n}.$$

Cela étant, nous subdiviserons, progressivement, l'ensemble de toutes les formes équivalentes, en réunissant dans un même groupe:

1°. toutes les formes où . . . . . . $a_{1,1}$ a la plus petite valeur possible,

2°. parmi celles-ci, toutes celles où $a_{2,2}$ est également un minimum,

3°. parmi les précédentes, celles où $a_{3,3}$ est encore un minimum,

et ainsi de suite, de telle sorte qu'après avoir épuisé la série $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, .. $a_{n,n}$, on arrive à ***une*** ou à ***plusieurs*** formes dont les coefficients des carrés sont nécessairement les mêmes.

Ces formes offrent un caractère essentiel qui consiste en ce que toutes les expressions quadratiques

$$(a_{i,i}, \ b_{i,j}, \ a_{j,j})$$

sont réduites. Cette remarque prouve qu'on a la limite:

$$a_{1,1} \,.\, a_{2,2} \ldots a_{n,n} < \mu \,.\, D,$$

μ étant un coefficient numérique ne dépendant que du nombre n des variables; mais je ne m'arrêterai pas à la démonstration.

Revenons au dernier groupe de formes équivalentes auquel nous venons de parvenir, il pourra être subdivisé de nouveau, d'après la grandeur des déterminants

$$A_{i,j} = a_{i,i} a_{j,j} - a_{j,j}^2,$$

en réunissant ensemble,

1°. toutes les formes où . . . . $A_{1,1}$ sera le plus petit possible,

2°. parmi ces dernières toutes celles où $A_{1,2}$ est également un minimum,

3°. parmi les précédentes celles où . . $A_{1,3}$ est encore un minimum,

et ainsi de suite, de telle sorte qu'après avoir épuisé la série:

$$A_{1,1},\ A_{1,2},\ \ldots\ A_{1,n},$$

on passe à la suivante:

$$A_{2,2},\ A_{2,3},\ \ldots\ A_{2,n},$$

puis à celle-ci:

$$A_{3,3},\ A_{3,4},\ \ldots\ A_{3,n},$$

et on continuera jusqu'à ce qu'on soit arrivé, en dernière analyse, à une ou à plusieurs formes offrant des valeurs numériques égales, pour toutes les quantités $A_{i,j}$.

Mais il est évident qu'alors les valeurs *absolues* des coefficients $a_{i,j}$ sont pareillement les mêmes. Or la forme unique qu'il faudra définitivement choisir pour réduite, s'obtiendra par la considération des déterminants ternaires

$$A_{i,j,k} = a_{i,i}a_{j,j}a_{k,k} + 2a_{i,j}a_{i,k}a_{j,k} - a_{i,i}a_{j,k}^2 - a_{j,j}a_{i,k}^2 - a_{k,k}a_{i,j}^2,$$

en opérant comme on l'a fait précédemment avec les fonctions $A_{i,j}$. Les formes réunies en dernier lieu, offrant les mêmes valeurs des diverses expressions $A_{i,j,k}$, deviendront *identiques*, en rendant positifs par exemple, comme cela est toujours possible, tous les coefficients $a_{0,i}$.

Réduire une forme donnée f, ce sera donc chercher la transformation de cette forme en la réduite équivalente telle qu'elle vient d'être définie. Cette réduite, comme Vous le voyez, Monsieur, n'est pas celle à laquelle conduit la méthode que j'ai eu l'honneur de Vous soumettre dans ma dernière lettre. Il y aura donc lieu d'espérer une nouvelle substitution, mais jusqu'ici je n'ai vu d'autre moyen à employer que celui qui est indiqué par l'analyse précédente et qui consiste à former la série entière des formes aux plus petits coefficients des carrés. Seulement il est facile de démontrer *que leur nombre a une limite indépendante du déterminant et qui est fonction uniquement du nombre des indéterminées.*

Dans le cas des formes ternaires, les réduites jouissent d'une propriété qui mérite peut-être d'être remarquée, *car elle ne me parait pas s'étendre aux formes contenant un plus grand nombre de variables.* Elle consiste en ce que *toute forme ternaire réduite* $\varphi(x, y, z)$ *prend une valeur moindre, en diminuant celle des variables dont la valeur absolue est la plus grande.*

Soit

$$\varphi = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy.$$

En supposant quelconques les signes des coefficients b, b', b'', on peut ad-

mettre que les indéterminées sont positives. Or en supposant $x \geqq y$, $x > z$, on prouve aisément la proposition énoncée, dans chacun des quatre cas qu'offrent les signes de b' et b'', au moyen des équations identiques,

$$\begin{aligned}
&\varphi(x-1, y, z) - \varphi(x, y, z) \\
= & -2(x-1)(a+b''+b') + 2b''(x-y-1) + 2b'(x-z-1) - a \\
= & -2(x-1)(a+b') - 2b''y + 2b'(x-z-1) - a \\
= & -2(x-1)(a+b'') + 2b''(x-y-1) - 2b'z - a \\
= & -2(x-1)a - 2b''y - 2b'z - a,
\end{aligned}$$

les quatre expressions précédentes correspondant aux quatre cas:

$$\begin{aligned} b'&: - - + + \\ b''&: - + - + \end{aligned}$$

Je reviens maintenant à la recherche de toutes les représentations distinctes des divers *minima*, de la forme quadratique:

$$\Phi = \left(\frac{\varphi(\alpha_1)}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(\alpha_2)}{A_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varphi(\alpha_n)}{A_n}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\varphi\beta_1\varphi\gamma_1}{K_1^2} + 2\frac{\varphi\beta_2\varphi\gamma_2}{K_2^2} + \cdots + 2\frac{\varphi\beta_{n'}\varphi\gamma_{n'}}{K_{n'}^2},$$

correspondants à tous les systèmes possibles de valeurs de A_1, A_2, etc., K_1, K_2, etc.

Dans cette forme, les quantités $\varphi\alpha$ sont les valeurs d'une expression telle que

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{m-1} x_{m-1},$$

en supposant α, l'une quelconque des racines de l'équation, $F(x) = 0$, dont le degré $n + 2n'$ est toujours désigné par m. Cela posé, soit pour un système déterminé de valeurs des quantités A et K,

$$\begin{aligned}
x_0 &= a_0 y_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_{m-1} y_{m-1} \\
x_1 &= b_0 y_0 + b_1 y_1 + \cdots + b_{m-1} y_{m-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{m-1} &= l_0 y_0 + l_1 y_1 + \cdots + l_{m-1} y_{m-1},
\end{aligned}$$

la substitution propre à réduire Φ. En posant pour abréger:

$$\begin{aligned}
(\alpha)_i &= a_i + \alpha b_i + \alpha^2 c_i + \cdots + \alpha^{m-1} l_i \\
\psi(\alpha) &= y_0(\alpha)_0 + y_1(\alpha)_1 + \cdots\cdots + y_{m-1}(\alpha)_{m-1},
\end{aligned}$$

la transformée réduite sera:

$$\Psi = \left(\frac{\psi(\alpha_1)}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\psi(\alpha_2)}{A_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\psi(\alpha_n)}{A_n}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\psi\beta_1\psi\gamma_1}{K_1^2} + 2\frac{\psi\beta_2\psi\gamma_2}{K_2^2} + \cdots + 2\frac{\psi\beta_{n'}\psi\gamma_{n'}}{K_{n'}^2}.$$

Mais on peut l'écrire d'une autre manière.

Soit y_0 celle des indéterminées dont le carré a le plus petit coefficient, posons:

$$N = (\alpha_1)_0(\alpha_2)_0 \ldots (\alpha_n)_0(\beta_1)_0(\gamma_1)_0 \ldots (\beta_{n'})_0(\gamma_{n'})_0,$$

il est clair que, α désignant l'une quelconque des racines, $\frac{N}{(\alpha)_0}$ sera un polynome à coefficients entiers en α, et qu'il en sera de même de

$$\frac{N}{(\alpha)_0}\cdot(\alpha)_i,$$

que je désignerai par $\psi_i(\alpha)$. Or de la valeur-limite du produit des coefficients des carrés des indéterminées dans toute forme réduite, telle qu'elle a été indiquée plus haut, on déduit facilement, *que tous ces polynomes $\psi_i(\alpha)$ ont pour coefficients des nombres entiers ayant aussi des limites finies.* Il en est de même d'ailleurs de N, comme on l'a vu précédemment d'une manière spéciale. Donc transformant ainsi les fonctions $\psi(\alpha)$, savoir:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha)_0}{N}\{y_0 N + y_1\psi_1(\alpha) + y_2\psi_2(\alpha) + \cdots + y_{m-1}\psi_{m-1}(\alpha)\},$$

et posant:

$$\chi(\alpha) = y_0 N + y_1\psi_1(\alpha) + y_2\psi_2(\alpha) + \cdots + y_{m-1}\psi_{m-1}(\alpha),$$
$$\frac{(\alpha_i)_0}{NA_i} = \frac{1}{A_i'}, \quad \frac{(\beta_i)_0(\gamma_i)_0}{N^2K_i^2} = \frac{1}{K_i'^2},$$

l'expression de ψ devient:

$$\Psi = \left(\frac{\chi(\alpha_1)}{A_1'}\right)^2 + \left(\frac{\chi(\alpha_2)}{A_2'}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\chi(\alpha_n)}{A_n'}\right)^2 + 2\frac{\chi(\beta_1)\chi(\gamma_1)}{K_1'^2} + \text{etc.}$$

et c'est là *le type analytique* *) auquel je voulais arriver pour y rapporter toute forme réduite. Le nombre de ces types, comme on le voit d'après la caractère des fonctions $\chi(\alpha)$, est essentiellement *fini* et c'est là un résultat qui ouvre la voie à un nouvel ordre de recherches destinées, si je ne m'abuse étrangement, à jeter un grand jour sur la nature si inconnue des irrationnelles algébriques.

---

*) D'après M. *Hermite* deux de ces types sont les mêmes lorsqu'ils ne diffèrent entr'eux que par rapport aux quantités A' et K'. *J.*

Et d'abord, *on en déduit immédiatement une démonstration directe, de la possibilité de l'équation que je me suis proposé de résoudre, savoir*

$$\text{Norme } \varphi(\alpha) = 1.$$

En effet, on a pour cela le théorème, *que lorsqu'une substitution,*

$$x_0 = p_0 y_0 + p_1 y_1 + \cdots + p_{m-1} y_{m-1}$$
$$x_1 = q_0 y_0 + q_1 y_1 + \cdots + q_{m-1} y_{m-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{m-1} = s_0 y_0 + s_1 y_1 + \cdots + s_{m-1} y_{m-1},$$

correspondante à un système différent de valeurs de A_1, A_2, etc., K_1, K_2, etc., *conduit au même type réduit* Ψ, *le nombre entier complexe représenté par le déterminant des quantités:*

$$\begin{matrix} (\alpha)_0 & (\alpha)_1 & \cdots & (\alpha)_{m-1} \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_{m-1} \\ r_0 & r_1 & \cdots & r_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1}, \end{matrix}$$

aura pour norme l'unité.

J'ai trouvé aussi, *qu'il suffisait d'obtenir le système des substitutions propres à réduire la forme* Φ, *dans un intervalle fini des quantités* A *et* K, *les substitutions correspondantes à toutes les autres valeurs de ces mêmes quantités se déduisant de celles-là.*

De là on déduit que toutes les solutions de l'équation

$$\text{Norme } \varphi(\alpha) = 1,$$

peuvent s'obtenir par un nombre *limité* d'entre elles, convenablement choisies, mais d'autres considérations menent à la même conséquence. Je vais les indiquer en restant dans le cas particulier qui me les a fait découvrir.

Désignons par α la racine réelle, et par β et γ les deux racines imaginaires de l'équation du 3ᵉ degré à coefficients entiers:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Soient aussi φ et ψ, deux unités complexes de la forme $x + \alpha y + \alpha^2 z$, je dis *que de ces deux unités en résulte une troisième dont elles sont l'une et l'autre des puissances entières.*

Posons en effet:

$$\Phi = \varphi^m \psi^n, \qquad \Psi = \varphi^{m_0} \psi^{n_0},$$

m, n, m_0, n_0 étant quatre nombres entiers tels que

$$mn_0 - nm_0 = 1,$$

on aura réciproquement,

$$\varphi = \Phi^{n_0} \Psi^{-n}, \quad \psi = \Psi^{m} \Phi^{-m_0}.$$

De deux choses l'une: ou l'on pourra faire p. ex. $\Phi = 1$, et le théorème est démontré: ou bien au moins $\Phi = \Psi^{\frac{\varepsilon}{n}}$, ε étant moindre que l'unité et n pouvant prendre une infinité de valeurs différentes. Or, ayant toujours, Norme $\Phi = 1$, on conclurait qu'il existe une infinité de solutions de cette équation dans lesquelles la valeur de l'unité complexe réelle et celle du module analytique des deux unités conjuguées imaginaires, seraient aussi voisines du nombre 1 qu'on le voudrait, ce qui est absurde.

Une méthode toute semblable m'a conduit à démontrer que dans le cas des *trois racines réelles*, toutes les unités sont les produits des puissances de *deux* d'entre elles qui ne sont pas réductibles l'une et l'autre aux puissances entières d'une troisième, et il ne me parait pas difficile d'étendre les mêmes considérations au cas le plus général.

Quatrième lettre.

La dernière lettre que j'ai eu l'honneur de Vous écrire, était à peine partie que j'ai eu communication par M. *Liouville,* d'une note tirée des comptes-rendus de Votre académie et dans laquelle Vous traitez de la réduction des formes quadratiques, à coefficients entiers, sous un point de vue qui ne se serait jamais présenté à mon esprit et qui m'a vivement intéressé. Le résultat plein d'élégance auquel Vous arrivez par une méthode si simple, m'a fait rechercher si dans ce nouveau type de formes réduites, il y avait encore possibilité d'obtenir *des limitations, des coefficients, fonctions seulement du déterminant.*

En particulier j'ai considéré, les formes définies ternaires:

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

dans lesquelles, d'après le principe de Votre méthode, il faut faire p. ex.

$$x = \frac{b}{\omega}\xi + \beta\eta,$$

$$y = -\frac{b'}{\omega}\xi + \beta'\eta,$$

ω désignant le p. g. c. diviseur de b et b', déterminé par l'équation:

$$\omega = b\beta' + b'\beta.$$

On obtient ainsi la transformée:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{A}'\eta^2 + a''z^2 + 2\mathfrak{B}\xi\eta + 2\omega\eta z,$$

où l'un des rectangles des indéterminées a disparu.

Cela posé, *si les coefficients de la forme proposée sont limités, au moyen du déterminant D, il en sera de même des coefficients de la transformée.* En particulier $\mathfrak{A}$ peut s'écrire,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\omega^2}(ab^2 + a'b'^2 - 2bb'b'') = \frac{1}{\omega^2}(aa'a'' - a''b''^2 - D),$$

donc

$$\mathfrak{A} < \frac{aa'a''}{\omega^2}.$$

Or on peut ensuite supposer

$$2\mathfrak{B} < \mathfrak{A},$$

en déterminant convenablement β et β' dans l'équation $\omega = b\beta' + \beta b'$ ou, ce qui est au fond la même chose, en changeant dans la transformée, ξ en $\xi + m\eta$. Quant à la limite du dernier coefficient $\mathfrak{A}'$, elle se tire de l'équation,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}^2 = aa' - b''^2.$$

En revenant aux premières considérations qui m'avaient fait entrevoir, il y a long-temps, l'importance de la recherche du minimum des formes à un nombre quelconque de variables, j'ai été conduit à présenter de la manière suivante, les idées que Vous avez le premier émises sur l'impossibilité de certaines fonctions périodiques.

Soient, pour les fonctions d'une seule variable,

$$a + b\sqrt{-1}, \quad a' + b'\sqrt{-1}, \quad a'' + b''\sqrt{-1}$$

trois indices quelconques de périodicité, je considère la forme définie ternaire,

$$f(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + \frac{z^2}{\Delta^2},$$

dont le déterminant

$$D = \left(\frac{ab' - ba'}{\Delta}\right)^2.$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul et que les deux équations:

$$ax + a'y + a''z = 0, \quad bx + b'y + b''z = 0,$$

ne peuvent avoir lieu en nombres entiers, la fonction sera impossible. Car pouvant faire pour toute valeur de Δ:

$$f < \sqrt[3]{(2D)}$$

et *a fortiori:*

$$(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 < \sqrt[3]{(2D)},$$

on déduirait des indices proposés, une période dont le module serait infiniment petit. Mais cette conclusion n'a plus lieu si $ab' - ba' = 0$. Alors je considère la forme binaire,

$$f = (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 + \frac{y^2}{\Delta^2},$$

dont le déterminant, dans l'hypothèse admise, se trouve être

$$D = \frac{a^2 + b^2}{\Delta^2}.$$

Or il est maintenant facile de prouver *que lorsque* $ab' - ba' = 0$, l'on ne

peut même admettre les deux périodes, $a+b\sqrt{-1}$ et $a'+b'\sqrt{-1}$, si on les suppose irréductibles, c. à d. si les équations,

$$ax+a'y = 0, \quad bx+b'y = 0,$$

ne peuvent avoir lieu en nombres entiers. On peut faire en effet, pour toute valeur de Δ:

$$f < \sqrt{(\tfrac{4}{3}D)},$$

et a fortiori:

$$(ax+a'y)^2+(bx+b'y)^2 < \sqrt{(\tfrac{4}{3}D)},$$

ce qui conduit de nouveau à une période infiniment petite.

Les fonctions de plusieurs variables à périodes coëxistantes que Vous avez introduites le premier dans l'analyse, peuvent être traitées par les mêmes principes.

Soient

$$a_i+b_i\sqrt{-1}, \quad c_i+d_i\sqrt{-1}, \quad \ldots \quad k_i+l_i\sqrt{-1},$$

n indices simultanés de périodicité correspondants, respectivement, aux variables

$$x, \quad y, \quad \ldots \quad u,$$

dans une fonction telle que $\mathfrak{F}(x, y, \ldots u)$, je dis *que si le nombre de ces groupes d'indices, supposés irréductibles surpasse 2n, la fonction proposée sera impossible, dans ce sens qu'on sera forcé d'admettre un groupe d'indices simultanés infiniment-petits.*

Faisons pour abréger:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{2n+1}x_{2n+1}\\
\mathfrak{B} &= b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_{2n+1}x_{2n+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{K} &= k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{2n+1}x_{2n+1}\\
\mathfrak{L} &= l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_{2n+1}x_{2n+1},
\end{aligned}$$

le déterminant D de la forme,

$$f = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\cdots+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2+\frac{x_{2n+1}^2}{\Delta^2},$$

sera, comme on le trouve aisément:

$$D = \frac{1}{\Delta^2}\cdot \text{dét.}\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & k_1 & l_1\\ a_2 & b_2 & \ldots & k_2 & l_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{2n} & b_{2n} & \ldots & k_{2n} & l_{2n}\end{Bmatrix}^2$$

et la conséquence que je voulais obtenir, découle, comme précédemment, de

la relation,

$$f < (\tfrac{4}{3})^n \sqrt[2n+1]{D},$$

à laquelle on peut toujours satisfaire quelque grand que soit $\varDelta$.

Si l'on suppose que le déterminant qui entre dans l'expression de D, s'évanouisse, la démonstration n'est plus applicable, mais la proposition n'en a pas moins lieu, et on obtient ainsi le premier terme d'une série de nouveaux cas d'impossibilité dont voici les conditions analytiques.

Soit pour abréger:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{2n+1-i} x_{2n+1-i} \\
\mathfrak{B}_i &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{2n+1-i} x_{2n+1-i} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{K}_i &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_{2n+1-i} x_{2n+1-i} \\
\mathfrak{L}_i &= l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_{2n+1-i} x_{2n+1-i},
\end{aligned}$$

et D_i le déterminant de la forme

$$f_i = \mathfrak{A}_i^2 + \mathfrak{B}_i^2 + \cdots + \mathfrak{K}_i^2 + \mathfrak{L}_i^2 + \frac{x_{2n+1-i}^2}{\varDelta^2}.$$

Si l'on suppose D_{i-1} nul, on trouve que $\varDelta^2 D_i$ s'obtient en faisant la somme des carrés de tous les déterminants que fournit le système:

$$\begin{matrix}
a_1, & b_1, & \cdots & k_1, & l_1 \\
a_2, & b_2, & \cdots & k_2, & l_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{2n-i}, & b_{2n-i}, & \cdots & k_{2n-i}, & l_{2n-i},
\end{matrix}$$

en employant, d'une manière quelconque, $2n-i$ lignes verticales. Or toute fonction périodique de n variables sera impossible lorsqu'ayant $2n-i$ groupes de périodes simultanées irréductibles savoir:

$$\{a_\mu + b_\mu\sqrt{-1},\quad c_\mu + d_\mu\sqrt{-1},\quad \ldots\quad k_\mu + l_\mu\sqrt{-1}\}_{\mu=1}^{\mu=2n-i},$$

le déterminant D_i de la forme f_i, composé avec ces indices, s'annullera. En effet, on arrivera à un système de périodes simultanées infiniment petites, en considérant dans la série des formes:

$$f_{i+1},\; f_{i+2},\; \ldots\; f_{2n-1},$$

la première de celles dont le déterminant ne s'évanouit point. La dernière d'ailleurs est dans ce cas, car on trouve aisément:

$$D_{2n-1} = \frac{1}{\varDelta^2}(a_1^2 + b_1^2 + \cdots + k_1^2 + l_1^2).$$

L'analyse que je viens d'employer, s'applique à une question bien différente, *à la théorie des unités complexes les plus générales*, et donne ce théorème:

„Soit m' le nombre des racines réelles et des *couples* de racines imaginaires d'une équation irréductible à coefficients entiers et dont le premier „coefficient est l'unité, si l'on a m' unités complexes quelconques, formées „avec les racines de cette équation, elles peuvent toujours s'exprimer par „les produits des puissances entières, positives ou négatives, de $m'-1$ „autres convenablement choisies *)."

Nommons

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots \ \alpha_\varkappa,$$

les racines réelles de l'équation proposée, et

$$\beta_1, \gamma_1; \ \ \beta_2, \gamma_2; \ \ \ldots \ \ \beta_{\varkappa'}, \gamma_{\varkappa'},$$

les diverses couples de ses racines imaginaires. Soit encore

$$\varphi_i(\alpha) = a_i + \alpha b_i + \alpha^2 c_i + \cdots + \alpha^{m-1} l_i,$$

une unité complexe quelconque, et

$$\log \varphi_i^2(\alpha) = (\alpha)_i$$

$$\log \varphi_i(\beta)\varphi_i(\gamma) = (\beta, \gamma)_i$$

$$F(\alpha) = x_1(\alpha)_1 + x_2(\alpha)_2 + \cdots + x_{m'}(\alpha)_{m'}$$

$$F(\beta, \gamma) = x_1(\beta, \gamma)_1 + x_2(\beta, \gamma)_2 + \cdots + x_{m'}(\beta, \gamma)_{m'},$$

je dis qu'il est toujours possible de déterminer pour $x_1, x_2, \ldots x_{m'}$, un système de valeurs entières, positives ou négatives, telles qu'on ait

$$(1.) \qquad F(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi_1^{2x_1}(\alpha).\varphi_2^{2x_2}(\alpha) \ldots \varphi_{m'}^{2x_{m'}}(\alpha) = 1.$$

Cette condition, d'ailleurs, aura nécessairement lieu à la fois pour toutes les racines, réelles ou imaginaires, puisqu'elles appartiennent, par hypothèse, à une équation irréductible.

Supposons en effet, l'équation (1.) impossible, et voyons quelles conséquences vont s'ensuivre.

---

*) Le théorème complet savoir: *Qu'il y a effectivement, dans tous les cas, $m'-1$ unités complexes indépendantes par les produits des puissances desquelles on puisse représenter toutes les autres*, est un des plus importants mais aussi un des plus épineux de la science des nombres. La démonstration rigoureuse de ce théorème a été donnée par M. *Lejeune Dirichlet*, dans les Comptes rendus mensuels de l'Acad. de Berlin du 30 Mars 1846. Voir aussi ceux d'Avril 1842 et d'Octobre 1841, et une lettre du même auteur à M. *Liouville* (J. d. M. Vol. V. 1840). *J.*

En premier lieu, deux systèmes distincts de valeurs entières des indéterminées, $x_1, x_2, \ldots x_{m'}$, ne donneront jamais la même valeur de $F(\alpha)$. Car ayant p. ex.

$$x_1(\alpha)_1 + x_2(\alpha)_2 + \cdots + x_{m'}(\alpha)_{m'} = y_1(\alpha)_1 + y_2(\alpha)_2 + \cdots + y_{m'}(\alpha)_{m'},$$

on en déduirait

$$(x_1 - y_1)(\alpha)_1 + (x_2 - y_2)(\alpha)_2 + \cdots + (x_{m'} - y_{m'})(\alpha)_{m'} = 0,$$

c. à d. une solution de l'équation (1.), ce qui est contre l'hypothèse admise.

Cela posé, je considère la forme quadratique:

$$F = F^2(\beta_1, \gamma_1) + F^2(\beta_2, \gamma_2) + \cdots + F^2(\beta_{n'}, \gamma_{n'})$$
$$+ F^2(\alpha_1) + F^2(\alpha_2) + \cdots + F^2(\alpha_{n-1}) + \frac{x_{m'}^2}{\Delta^2},$$

dont le déterminant est:

$$D = \frac{1}{\Delta^2} \text{dét.} \begin{pmatrix} (\alpha_1)_1 & (\alpha_1)_2 & \cdot\cdot & (\alpha_1)_{m'-1} \\ (\alpha_2)_1 & (\alpha_2)_2 & \cdot\cdot & (\alpha_2)_{m'-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{n-1})_1 & (\alpha_{n-1})_2 & \cdot\cdot & (\alpha_{n-1})_{m'-1} \\ (\beta_1, \gamma_1)_1 & (\beta_1, \gamma_1)_2 & \cdot\cdot & (\beta_1, \gamma_1)_{m'-1} \\ (\beta_2, \gamma_2)_1 & (\beta_2, \gamma_2)_2 & \cdot\cdot & (\beta_2, \gamma_2)_{m'-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\beta_{n'}, \gamma_{n'})_1 & (\beta_{n'}, \gamma_{n'})_2 & \cdot\cdot & (\beta_{n'}, \gamma_{n'})_{m'-1} \end{pmatrix}^2$$

et je le supposerai d'abord différent de zéro.

Dans ce cas, si je cherche les minima de la forme F, pour des valeurs indéfiniment croissantes de Δ, il est clair qu'en posant

$$F^2(\alpha) = \log \Phi^2(\alpha)$$

et par suite,

$$F^2(\beta, \gamma) = \log \Phi^2(\beta) \Phi^2(\gamma),$$

j'obtiendrai une infinité d'unités complexes, $\Phi(\alpha)$, toutes différentes, d'après la remarque précédemment faite, et dont les valeurs absolues réelles, ainsi que les modules des valeurs imaginaires, seront aussi voisins de l'unité qu'on voudra. Or on aurait de la sorte, m' fonctions linéaires et homogènes, à m' indéterminées entières, qui seraient susceptibles de prendre une infinité de valeurs numériques inégales et comprises dans un intervalle limité, ce qui est absurde.

Lorsque le determinant D sera différent de zéro, on peut donc satisfaire par des nombres entiers à l'équation,

$$x_1(\alpha)_1 + x_2(\alpha)_2 + \cdots + x_{m'}(\alpha)_{m'} = 0.$$

Cela posé, je fais

$$y_1(\alpha)_1 + y_2(\alpha)_2 + \cdot\cdot + y_{m'}(\alpha)_{m'} = \log Y(\alpha)$$
$$z_1(\alpha)_1 + z_2(\alpha)_2 + \cdot\cdot + z_{m'}(\alpha)_{m'} = \log Z(\alpha)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_1(\alpha)_1 + v_2(\alpha)_2 + \cdot\cdot + v_{m'}(\alpha)_{m'} = \log V(\alpha),$$

les nombres entiers $y, z, .. v$, étant pris de manière que le déterminant relatif à ces équations linéaires et à la précédente, soit l'unité. Il est clair qu'on pourra tirer de là, les valeurs des m' unités $\varphi_i(\alpha)$, exprimées par les produits des puissances entières de $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$, .. $V(\alpha)$, qui représentent d'autres unités complexes, au nombre seulement de $m'-1$.

Il me reste à examiner le cas où le déterminant de la forme F, est supposé s'évanouir. Soit alors:

$$F_i(\alpha) = x_1(\alpha)_1 + x_2(\alpha)_2 + \cdot\cdot + x_{m'-i}(\alpha)_{m'-i},$$
$$F_i(\beta,\gamma) = x_1(\beta,\gamma)_1 + x_2(\beta,\gamma)_2 + \cdot\cdot + x_{m'-i}(\beta,\gamma)_{m'-i},$$

et D_i le déterminant de la forme

$$F_i = F_i^2(\beta_1,\gamma_1) + F_i^2(\beta_2,\gamma_2) + \cdot\cdot + F_i^2(\beta_{n'},\gamma_{n'})$$
$$+ F_i^2(\alpha_1) + F_i^2(\alpha_2) + \cdot\cdot + F_i^2(\alpha_{n-1}) + \frac{x_{m'-i}^2}{\Delta^2}.$$

Si l'on suppose D_{i-1} nul, on trouve, tout-à-fait comme précédemment, que $\Delta^2 D_i$ s'obtient en faisant la somme des carrés des divers déterminants que fournit le système:

$$\begin{array}{cccccc}
(\alpha_1)_1 & (\alpha_2)_1 & \cdot\cdot\ (\alpha_{n-1})_1 & (\beta_1,\gamma_1) & (\beta_2,\gamma_2)_1 & \cdot\cdot\ (\beta_{n'},\gamma_{n'}) \\
(\alpha_1)_2 & (\alpha_2)_2 & \cdot\cdot\ (\alpha_{n-1})_2 & (\beta_1,\gamma_1) & (\beta_2,\gamma_2)_2 & \cdot\cdot\ (\beta_{n'},\gamma_{n'}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\alpha_1)_{m'-1-i} & (\alpha_2)_{m'-1-i} & \cdot\cdot\ (\alpha_{n-1})_{m'-1-i} & (\beta_1,\gamma_1)_{m'-1-i} & (\beta_2,\gamma_1)_{m'-1-i} & \cdot\cdot\ (\beta_{n'},\gamma_{n'})_{m'-1-i}
\end{array}$$

en employant $m'-1-i$ lignes verticales. Considérant donc dans la série des formes

$$F_1,\quad F_2,\quad ..\quad F_{m'-2},$$

la première de celles dont le déterminant ne s'évanouit point (et la dernière est toujours dans ce cas), on obtiendra absolument les mêmes résultats que ceux auxquels nous sommes parvenus tout-à-l'heure, puisque le déterminant D_i devient d'une petitesse arbitraire pour des valeurs suffisamment grandes de Δ.

Je ne sais, Monsieur, si ces résultats et la méthode que j'ai employée, sont connus, et nommément s'ils se trouvent déjà dans les travaux de M. *Kummer*, que Vous avez eu la bonté de m'indiquer. M. *Liouville* sans doute les publierait de suite dans son journal, si nous pouvions trouver un traducteur, et ce serait pour moi en particulier, un grand plaisir de prendre connaissance de ces recherches d'après ce que Vous m'en avez écrit. L'introduction du nombre complexe auquel M. *Kummer* donne le nom *d'idéal,* m'intéresserait surtout au plus haut degré.

P. S. L'expression des unités complexes au moyen d'un nombre déterminé d'entre elles, donne lieu à une remarque essentielle et que j'ai omise, lorsque les racines qui entrent dans leur composition, sont toutes imaginaires. L'analyse que j'ai employée, conduit alors de nouveau à isoler celles de ces unités dont le module analytique est *un,* si toutefois il en existe. C'est au reste le même résultat auquel je suis parvenu par une toute autre voie dans ma dernière lettre.

27.

Auszug zweier Schreiben des Prof. Hesse an den Herrn Prof. Jacobi und eines Schreibens des Prof. Jacobi an Herrn Prof. Hesse.

Königsberg den 27. November 1849.

Ihr Brief ist mir von unschätzbarem Werthe, weil ich daraus Ihre alte Freundschaft entnehme, und er mir zugleich das bringt, wonach ich mich lange gesehnt habe. Sie schreiben von meiner Meisterschaft in gewissen mathematischen Dingen und beweisen gleich darauf, wie viel mir daran fehlt. Das lasse ich mir schon gerne gefallen, da dieser Beweis von unberechenbarem Nutzen für meine Bemühungen zu werden verspricht. Ich bedauere nichts mehr, als dafs 80 Meilen zwischen uns liegen, was mit einem halben Jahre gleichbedentend ist. Im Sommer haben Sie den Beweis gemacht, der für mich vielleicht eine Lebensfrage ist, und im Winter erst kann ich ihn erfahren.

Reductionen der Art kommen in der Geometrie oft vor. *So läfst sich z. B. der Grad der Gleichung der Schmiegungs-Ebene einer Curve doppelter Krümmung, entstanden aus dem Schnitt zweier algebraischen Oberflächen, immer um 2 Einheiten in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunctes mit Hülfe der Gleichungen der beiden Oberflächen reduciren.* Die reducirten Gleichungen, zu weitläuftig hier hinzuschreiben, werde ich alsbald an das Journal schicken.

Ich erlaube mir noch in Rücksicht auf die Wendepuncte eine Bemerkung hinzuzufügen, die ich eben jetzt gemacht habe, und die mir interessant scheint. Wenn u eine homogene Function von x, y, z, und wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}:\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}:\dots:\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}:\dots=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}:\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}:\dots:\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}:\dots,$$

wo v die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten von u zusammengesetzte Determinante ist. Hieraus erklärt sich auch, warum in einen Doppelpunct immer 6 Wendepuncte zusammenfallen.

Mit dem innigen Wunsche Ihres Wohlergehens

Ihr treu ergebener Schüler

Otto Hesse.

Königsberg den 7. December 1849.

— — — Sie haben durch Ihren Beweis von den Doppeltangenten zugleich dargethan, dafs auch der Grad jedes Gliedes der Reihe

$$f(x+bh,\ y-ah) = \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \cdots,$$

wo $b=\frac{\partial f}{\partial y}$, $a=\frac{\partial f}{\partial x}$, mit Hülfe der Gleichung, $f(x,y)=0$, sich um 2 Einheiten erniedrigen läfst. Wie sich aber durch diese Erniedrigung die Coëfficienten α_2, α_3, . . gestalten, läfst sich aus Ihren Andeutungen nicht schliefsen, (Sie haben das ja auch gar nicht gewollt) und doch wäre gerade die wirkliche Darstellung der reducirten α in einer einfachen Form für mich von der höchsten Wichtigkeit.

Schliefslich erwähne ich noch einer Eliminationsmethode zur Anwendung auf Curven 3ter und 4ter Ordnung. Ich habe mir nämlich die Aufgabe gestellt, die Gleichungen dieser Curven durch Liniencoordinaten auszudrücken, wenn sie in Punctcoordinaten gegeben sind, d. h. die Variabeln aus den 4 Gleichungen zu eliminiren:

$$(1.)\quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha_1,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha_2,\quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \alpha_3,$$

$$(2.)\qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

wenn $u=0$ die Gleichung der Curve ist. Zu diesem Zwecke bilde ich für die Curven 3ten Grades die Determinante v aus den Gröfsen

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} & \alpha_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0, \end{matrix}$$

und eliminire die Variabeln x_1, x_2, x_3, λ aus den linearen Gleichungen

$$(2.)\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

$$(3.)\quad \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda\alpha_1 = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda\alpha_2 = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_3} + \lambda\alpha_3 = 0.$$

Dieses Verfahren für die Curven 3ter Ordnung ist ein anderes als das, welches ich bereits bekannt gemacht habe und was auch *Cayley* bekannt gewesen sein soll.

In dem Falle, wenn $u=0$ eine Curve 4ter Ordnung ist, bilde ich aus der Gleichung (2.) 6 andere Gleichungen durch Multiplication mit x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, und eliminire aus diesen 6 Gleichungen, den 3 Gleichungen (1.) und den 3 Gleichungen (3.), wie aus linearen Gleichungen, die 11 Unbekannten x_1^3, $x_1^2x_2$, . . und λ.

Otto Hesse.

Von dem ersten Satz Ihres gütigen Schreibens vom 27ten Nov. habe ich einen Beweis gesucht. Man hat die n identischen Gleichungen:

$$x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_i}+x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_i}\cdots+x_n\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_i}=(m-1)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

wenn u vom m^{ten} Grade ist. Durch ihre Auflösung erhalte man:

$$vx_i=(m-1)\left\{U_{1,i}\frac{\partial u}{\partial x_1}+U_{2,i}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdots+U_{n,i}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\},$$

wo $U_{i,k}=U_{k,i}$. Differentiirt man diese Gleichung nach x_k, so wird

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}x_i=(m-1)\left\{\frac{\partial U_{1,i}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdots+\frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\},$$

wo x_k von x_i verschieden. Differentiirt man nochmals nach x_l, so erhält man

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_l}x_i=(m-1)\left\{\frac{\partial^2 U_{1,i}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 U_{2,i}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdots+\frac{\partial^2 U_{n,i}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\}$$
$$-(m-1)\left\{U_{1,i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_k\partial x_l}+U_{2,i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2\partial x_k\partial x_l}\cdots+U_{n,i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_n\partial x_k\partial x_l}\right\}.$$

Wenn $l=i$, kommt rechts noch $(m-1)\frac{\partial v}{\partial x_k}$ hinzu.

Es sei jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\quad ..\quad \frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

so wird

$$\Delta=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_k}=0,\quad U_{i,k}=Nx_ix_k,$$

wo N für sämmtliche Combinationen von i und k Dasselbe bleibt. Es folgt daher aus der zuletzt gefundnen identischen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_l}=-(m-1)(m-2)N.\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l};$$

was Ihren Satz giebt.

C. G. J. Jacobi.

28.

Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Professor Jacobi über die hyperelliptischen Transcendenten.

I.

Dominium Wiersbel, Kreis Falkenberg in Oberschlesien
den 3. September 1844.

Meine Arbeit über die *dreifach* periodischen Functionen *) habe ich immer nur als eine Vorarbeit angesehen, die mir bei der Untersuchung der *vierfach* periodischen Functionen manchen Fingerzeig geben könnte. Diese Ansicht hat sich jetzt bei mir vollkommen befestigt. *Ich habe nämlich jetzt vierfach periodische Functionen, durch deren Differentiation man auf das hyperelliptische Integral,*

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x))}},$$

kommt.

Sie erinnern sich vielleicht noch, dafs ich kurz vor meiner Abreise von Königsberg Ihnen unendliche Producte mittheilte, von denen ich vermuthete, dafs sie auf das hyperelliptische Integral führen würden, weil ich sie auf ähnliche Art aus den dreifach periodischen Functionen zusammengesetzt hatte, wie die doppelt periodischen aus den einfach periodischen zusammengesetzt werden. Nachdem ich mit meiner Habilitation in Breslau fertig war, nahm ich diesen Gedanken wieder auf. Ich sah aber bald, wie es sehr schwer sei, von diesen Producten aus durch wirkliche Ausführung der Multiplication auf einfache Reihen zu kommen. Ich versuchte mich daher lieber unmittelbar an den unendlichen Reihen selbst, und bildete mir dergleichen aus den dreifach periodischen Functionen (oder vielmehr aus ihren Zählern und Nennern) auf ähnliche Art, wie die Functionen ϑ aus der einfach periodischen Function zusammengesetzt werden. Diese Reihen konnten eben so behandelt werden, wie die Functionen ϑ von

*) Mit dieser nicht publicirten Arbeit hatte Hr. Dr. *Rosenhain* in Königsberg den Doctorgrad erworben. J.

Ihnen in Ihren Vorlesungen behandelt worden sind. Mit der gröfsesten Zuversicht, dafs ich wirklich auf das hyperelliptische Integral kommen würde, ging ich an die Arbeit, nachdem ich bemerkt hatte, dafs die eine der Reihen, aus welcher sich die übrigen 15 durch Vermehrung der Argumente um halbe Indices ergeben, wenn man von constanten Factoren absieht, die Form habe,

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{am^2+bn^2+2cmn+2dm+2en},$$

d. h. nichts anderes sei, als eine Summe von Exponentialgröfsen, deren Exponenten aus einem vollständigen Ausdruck zweiter Ordnung mit *zwei* Variablen dadurch erhalten werden, dafs man für die beiden Variablen alle positiven und negativen ganzen Zahlen setzt. Denn ähnlich war der Zähler von Δ am, den Sie in den Vorlesungen mit $\vartheta_3(v)$ bezeichnet haben,

$$\vartheta_3(v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{am^2+2vm},$$

wo $a = \log q$, oder eine Summe von Exponentialgröfsen, deren Exponenten aus einem vollständigen Ausdruck 2ter Ordnung mit *einer* Variablen dadurch erhalten werden, dafs man für die Variable alle positiven und negativen ganzen Zahlen setzt.

Doch ich vergesse ganz, dafs ich Ihnen dergleichen nicht so weitläufig auszuführen brauche. Ich will Ihnen daher nur die Resultate kurz hinschreiben.

Es ist nach Ihrer Bezeichnungsart in den Vorlesungen,

$$\vartheta_3(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p^{n^2} e^{2nv}, \qquad \vartheta_2(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2} e^{(2n+1)v}$$

$$\vartheta(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n p^{n^2} e^{2nv}, \qquad \vartheta_1(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n p^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2} e^{(2n+1)v}.$$

Wenn nun k irgend einen von den Indices 0, 1, 2, 3 dieser 4 Functionen ϑ bezeichnet, so sind die 16 neuen Reihen durch folgende Bezeichnungen gegeben:

$$\varphi_{k,3}(v,w,p,q) = \Sigma q^{n^2} e^{2nw} \vartheta_k(v+2n\alpha, p)$$
$$\varphi_{k,2}(v,w,p,q) = \Sigma q^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2} e^{(2n+1)w} \vartheta_k(v+(2n+1)\alpha, p)$$
$$\varphi_{k,0}(v,w,p,q) = \Sigma (-1)^n q^{n^2} e^{2nw} \vartheta_k(v+2n\alpha, p)$$
$$\varphi_{k,1}(v,w,p,q) = \Sigma (-1)^n q^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2} e^{(2n+1)w} \vartheta_k(v+(2n+1)\alpha, p);$$

oder auch

$$\varphi_{3,k}(v, w, p, q) = \Sigma p^{m^2} e^{2mv} \vartheta_k(w + 2m\alpha, q)$$
$$\varphi_{2,k}(v, w, p, q) = \Sigma p^{(\frac{1}{2}(2m+1))^2} e^{(2m+1)v} \vartheta_k(w + (2m+1)\alpha, q)$$
$$\varphi_{0,k}(v, w, p, q) = \Sigma (-1)^m p^{m^2} e^{2mv} \vartheta_k(w + 2m\alpha, q)$$
$$\varphi_{1,k}(v, w, p, q) = \Sigma (-1)^m p^{(\frac{1}{2}(2m+1))^2} e^{(2m+1)v} \vartheta_k(w + (2m+1)\alpha, q).$$

Wie Sie sehen, hat die Function

$$\varphi_{3,3}(v, w, p, q) = \Sigma\Sigma p^{m^2} q^{n^2} e^{4mn\alpha + 2mv + 2nw}$$

die Form der angegebenen Doppelsumme.

Diese Function φ habe ich nun auf ähnliche Art behandelt, wie Sie die Functionen ϑ behandelten, um von denselben aus auf das elliptische Integral zu kommen. Die Resultate dieser Arbeit sind bis jetzt ungefähr folgende.

Ich will kurz setzen $\varphi_{i,k}(v, w)$ statt $\varphi_{i,k}(v, w, p, q, \alpha)$ und $\varphi_{i,k}$ statt $\varphi_{i,k}(0, 0, p, q, \alpha)$. Der Index i gehört zu v und p, der Index k zu w und q; der Modul α gehört sowohl zu v als zu w.

Setzt man

$$\varkappa = \frac{\varphi_{2,3}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,3}\varphi_{3,2}}, \quad \lambda = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}}, \quad \mu = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,3}},$$

woraus $\varkappa > \lambda > \mu$ folgt, und bedient man sich der von Herrn Prof. ***Richelot*** eingeführten Bezeichnungen,

$$\varkappa_1^2 = 1 - \varkappa^2, \quad \lambda = 1 - \lambda^2, \quad \mu_1^2 = 1 - \mu^2$$
$$\mu_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \mu^2, \quad \mu_\lambda^2 = \lambda^2 - \mu^2, \quad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2,$$

so wird

$$\varkappa_1 = \frac{\varphi_{0,3}\varphi_{0,2}}{\varphi_{3,3}\varphi_{3,2}}, \quad \lambda_1 = \frac{\varphi_{0,0}\varphi_{0,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}}, \quad \mu_1 = \frac{\varphi_{0,0}\varphi_{0,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,3}}.$$

$$\mu_\varkappa = \frac{\varphi_{1,1}\varphi_{0,3}\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}}, \quad \lambda_\varkappa = \frac{\varphi_{1,1}\varphi_{0,2}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}}, \quad \mu_\lambda = \frac{\varphi_{1,1}\varphi_{0,0}\varphi_{2,0}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}}.$$

Damit Sie alle Formeln, die sich auf die Moduln beziehen, beisammen haben, bemerke ich noch folgende, die sich aus den vorstehenden Formeln ergeben

$$\frac{\varphi_{0,0}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\mu_1\mu_\lambda}{\lambda\mu_\varkappa}, \quad \frac{\varphi_{0,2}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu\varkappa_1\lambda_\varkappa}{\lambda\mu_\varkappa}, \quad \frac{\varphi_{0,3}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu_1\varkappa_1}{\lambda_1}$$

$$\frac{\varphi_{1,1}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1}, \quad \frac{\varphi_{2,2}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\mu_1\lambda_\varkappa}{\lambda_1\mu_\varkappa}; \quad \frac{\varphi_{2,0}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda_1\mu_\varkappa}$$

$$\frac{\varphi_{2,3}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\mu}{\lambda}, \quad \frac{\varphi_{3,0}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}, \quad \frac{\varphi_{3,2}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu\mu_1\lambda_\varkappa}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}.$$

Setzt man ferner

$$1)\qquad \frac{1}{\varkappa\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -x_1x_2$$

$$2)\qquad \frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_1}{\varkappa\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -(1-x_1)(1-x_2),$$

so wird:

$$3)\qquad \varkappa_1\lambda_1\mu_1\cdot\frac{\varphi^2_{3,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-x_2)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)]} \pm \sqrt{[x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$4)\qquad \frac{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{3,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = (1-\varkappa^2x_1)(1-\varkappa^2x_2)$$

$$5)\qquad \frac{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{3,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = (1-\lambda^2x_1)(1-\lambda^2x_2)$$

$$6)\qquad \frac{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{3,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = (1-\mu^2x_1)(1-\mu^2x_2)$$

$$7)\qquad \frac{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{0,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)]} \pm \sqrt{[(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$8)\qquad \frac{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{0,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)]} \pm \sqrt{[(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$9)\qquad \frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{0,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)x_1(1-x_1)(1-\mu^2x_1)]} \pm \sqrt{[(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)x_2(1-x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$10)\qquad \frac{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\varkappa}\cdot\frac{\varphi^2_{1,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)x_1(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)]} \pm \sqrt{[(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)x_2(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$11)\qquad \frac{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{1,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)]} \pm \sqrt{[(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$12)\qquad \frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{1,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$13)\qquad \frac{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\varkappa}\cdot\frac{\varphi^2_{2,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$14)\qquad \frac{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{2,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-\lambda^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-\lambda^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$15)\qquad \frac{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{2,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-\mu^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-\mu^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2.$$

Diese 15 algebraischen Ausdrücke von x_1 und x_2 sind genau dieselben, von welchen ich in meiner Doctordissertation die Vermuthung aussprach, dafs sie sich sämmtlich auf gleich einfache Art als gebrochene transcendente Functionen der zwei Argumente v und w würden darstellen lassen, und zwar mit gemeinschaftlichem Nenner.

Die partiellen Differentialquotienten von $\sqrt{(x_1x_2)}$ und $\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}$ kann man sehr bequem darstellen. Man setze

$$du = \frac{1-\lambda^2x_1}{\sqrt{(x_1,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_1+\frac{1-\lambda^2x_2}{\sqrt{(x_2,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_2$$

$$du' = \frac{1-\mu^2x_1}{\sqrt{(x_1,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_1+\frac{1-\mu^2x_2}{\sqrt{(x_2,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_2,$$

wo

$$(x,\varkappa,\lambda,\mu) = x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

ist; dann erhält man unmittelbar

$$2\mu_\lambda^2\frac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\sqrt{[(1-\mu^2x_1)(1-\mu^2x_2)]}\,\partial u}$$

$$=\frac{\sqrt{[x_2(1-\mu^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}-\sqrt{[x_1(1-\mu^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}$$

$$-2\mu_\lambda^2 \frac{\partial \sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}}{\sqrt{[(1-\mu^2 x_1)(1-\mu^2 x_2)]}\,\partial u}$$

$$= \frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\mu^2 x_2)x_1(1-\varkappa^2 x_1)(1-\lambda^2 x_1)]}-\sqrt{[(1-x_1)(1-\mu^2 x_1)x_2(1-\varkappa^2 x_2)(1-\lambda^2 x_2)]}}{x_2-x_1}$$

$$-2\mu_\lambda^2 \frac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\sqrt{[(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2)]}\,\partial u'}$$

$$= \frac{\sqrt{[x_2(1-\lambda^2 x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2 x_1)(1-\mu^2 x_1)]}-\sqrt{[x_1(1-\lambda^2 x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2 x_2)(1-\mu^2 x_2)]}}{x_2-x_1}$$

$$2\mu_\lambda^2 \frac{\partial \sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}}{\sqrt{[(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2)]}\,\partial u'}$$

$$= \frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\lambda^2 x_2)x_1(1-\varkappa^2 x_1)(1-\mu^2 x_1)]}-\sqrt{[(1-x_1)(1-\lambda^2 x_1)x_2(1-\varkappa^2 x_2)(1-\mu^2 x_2)]}}{x_2-x_1}$$

Wird dann gesetzt,

$$du = A dv + B dw$$
$$du' = A' dv + B' dw,$$

so ergiebt sich

$$(A.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\partial v} = A\dfrac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\partial u} + A'\dfrac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\partial u'} \\[2ex] \dfrac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\partial w} = B\dfrac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\partial u} + B'\dfrac{\partial \sqrt{(x_1 x_2)}}{\partial u'}, \end{cases}$$

und Ähnliches für $\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}$.

Die Differentialquotienten von $\sqrt{(x_1 x_2)}$ und $\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}$ stellen sich je als Producte von zwei jener 15 gleichberechtigten algebraischen Ausdrücke von x_1 und x_2 dar. Wenn Sie daher in den Gleichungen (*A.*) statt x_1 und x_2 die Ausdrücke in v und w substituiren, so erhalten Sie die Differentialquotienten von

$$\frac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}, \quad \frac{\varphi_{2,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}$$

durch die übrigen Functionen φ dargestellt. Die Ausdrücke für diese Differentialquotienten, wie auch die oben mitgetheilten Werthe der übrigen 13 algebraischen Ausdrücke, habe ich gefunden, indem ich genau denselben Weg einschlug, auf welchem Sie uns in den Vorlesungen von den Functionen ϑ zu den elliptischen Integralen geführt haben.

Von den 16 Functionen $\varphi_{i,k}(v,w)$ verschwinden für $v=w=0$ die 6 folgenden,

$$\varphi_{1,0}(v,w),\quad \varphi_{0,1}(v,w),\quad \varphi_{1,2}(v,w),$$
$$\varphi_{2,1}(v,w),\quad \varphi_{1,3}(v,w),\quad \varphi_{3,1}(v,w),$$

als ungerade Functionen der Variabeln v und w. Die Constanten A, B, A', B', welche Functionen der drei Moduln $\varkappa$, λ, μ oder der Gröfsen p, q, α sind, setzen sich nun aus den Werthen zusammen, welche die 10 Functionen φ, die für $v=w=0$ nicht verschwinden, und die Differentialquotienten der für diese Annahme verschwindenden 6 Functionen φ, für $v=w=0$ annehmen. Vier von diesen 6 Functionen lassen sich auf die beiden übrigen zurückführen, so dafs im Ganzen in den Ausdrücken von A, A', B, B' noch die Werthe zu bestimmen übrig bleiben, welche die 4 partiellen Differentialquotienten von 2 jener 6 Functionen φ für $v=w=0$ annehmen. Es ist zu vermuthen, dafs auch diese Werthe der Differentialquotienten sich auf eine einfache Art auf die Werthe der andern 10 Functionen φ für $v=w=0$ zurückführen lassen werden, nach Analogie Ihrer Gleichung $\vartheta_1'(0)=\vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)$; doch ist mir bis jetzt diese Reduction noch nicht gelungen.

Über die Intervalle, in welchen die Grenzen x_1 und x_2 liegen, und über die Indices der Perioden, erlaube ich mir, noch einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Wenn v und w beide *reell* sind, so liegt x_1 zwischen $-\infty$ und 0, x_2 zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$. Wenn aber v und w beide den Factor $\sqrt{-1}$ haben, so liegt x_1 zwischen 0 und 1, x_2 zwischen $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$. Durch Änderungen von v und w um die halben Indices der Perioden kommen die Grenzen x_1 und x_2 in andere Intervalle zu liegen.

Was die *Periodicität* betrifft, so sind die 4 Indices von v:

$$i\pi,\quad 0,\quad \log p,\quad 2\alpha,$$

denen nach der Reihe die Indices von w:

$$0,\quad i\pi,\quad 2\alpha,\quad \log q$$

entsprechen. Ich habe noch nicht streng untersucht, zwischen welchen Grenzen die ganzen Integrale zu nehmen sind, damit sie diesen Werthen gleich werden, oder vielmehr, welchem von den 8 ganzen Integralen jeder der 8 Indices von v und w gleich wird. Man kann sich aber a, b, a', b' immer so bestimmt denken, dafs

$$2\int_0^1 \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = \pi, \qquad 2\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 0$$

$$2\int_0^1 \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 0, \qquad 2\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = \pi.$$

Dann müssen p, q, α, wenn man mit ε und ε_1 die positive oder negative Einheit bezeichnet, den Gleichungen

$$2\varepsilon\int_{-\infty}^{0} \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = i\log p, \qquad 2\varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 2i\alpha,$$

$$2\varepsilon\int_{-\infty}^{0} \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 2i\alpha, \qquad 2\varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = i\log q$$

genügen; und dazu ist die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} - \varepsilon\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}$$

$$= \varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} - \varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}$$

erforderlich, die auch unter der Form,

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{0}\int_0^1 \frac{(y-z)\,dy\,dz}{\sqrt{(y,\varkappa,\lambda,\mu)}\sqrt{(z,\varkappa,\lambda,\mu)}} = -\varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(y-z)\,dy\,dz}{\sqrt{(y,\varkappa,\lambda,\mu)}\sqrt{(z,\varkappa,\lambda,\mu)}},$$

dargestellt werden kann.

Diese Gleichung ist entweder eine *identische*, oder aber die Moduln $\varkappa$, λ, μ wären nicht alle drei willkürlich anzunehmen, sondern einer als Function der beiden andern aus dieser Gleichung bestimmt. Da ich nicht im Stande war, von vorn herein der Gleichung anzusehen, ob sie identisch sei, oder nicht, so liefs ich vorläufig die Sache auf sich beruhen, und absolvirte zuerst den Beweis, dafs die Functionen φ wirklich auf ein hyperelliptisches Integral führen. Nachdem dies geschehen ist, und ich wenigstens zwischen den für $\varkappa$, λ, μ angenommenen Werthen,

$$\varkappa = \frac{\varphi_{2,3}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,3}\varphi_{3,2}}, \quad \lambda = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}}, \quad \mu = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,3}},$$

keine Relation entdecken kann, soll es nun meine nächste Arbeit sein, die Gleichung zwischen den Doppel-Integralen zu untersuchen. Ich halte es für das Gerathenste, zu diesem Zwecke das *Abel*sche Theorem auf Doppel-Integrale auszudehnen, worüber Sie einen Fingerzeig in Ihrer Recension von *Legendres* „Traité" gegeben haben. Es ist anzunehmen, dafs auch zwischen den vielfachen bestimmten Integralen hier Relationen Statt finden. Eine derselben ist schon von *Haedenkamp,* nachdem Sie das Resultat vorher erwähnt hatten, im *Crelle*schen Journal bekannt gemacht. So viel ich mich erinnere, ist es für die nächste Gattung hyperelliptischer Integrale ein 6faches Integral, das dort $\frac{1}{2}\pi$ proportional gefunden wird, und die Erweiterung der Relation ist, welche zwischen den ganzen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung Statt findet.

Wird $\lambda = \mu = 0$ gesetzt, so wird die in Rede stehende Gleichung von selbst erfüllt, wenn $\varepsilon = -\varepsilon_1$ gesetzt wird.

Es wäre vom höchsten Interesse, nun auch die Reihen

$$\Sigma e^{f(m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1})}$$

zu untersuchen, in denen $f(m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1})$ eine vollständige rationale ganze Function der $n-1$ Gröfsen $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ vom zweiten Grade bedeutet, und die Summe Σ so zu nehmen ist, dafs diesen $n-1$ Gröfsen die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen beigelegt werden. Nach der Analogie der elliptischen und der ersten Classe der hyperelliptischen Integrale sollte man erwarten, dafs diese Reihen auf das hyperelliptische Integral der $(n-2)$ten Classe führen werden, in welchem die Gröfse unter dem Wurzelzeichen auf den $(2n)$ten oder $(2n-1)$ten Grad steigt. Dieses Integral hat aber nur $2n-3$ von einander unabhängige Moduln, während in der Reihe, wenn man die $(n-1)$ Coëfficienten der *ersten* Potenzen der $n-1$ Gröfsen m_ν als die $n-1$ *Argumente* betrachtet, $\frac{1}{2}(n-1)n$ *Moduln* vorkommen; wenn man nämlich Moduln die in die *zweiten* Potenzen der Zahlen m_ν multiplicirten Gröfsen nennt. Man sieht leicht, dafs diese Reihen sich auf dieselbe Art behandeln lassen, wie die ϑ und φ, indem man nämlich den Satz, dafs sich eine Summe von 4 Quadraten noch einmal als Summe von 4 andern Quadraten darstellen läfst, auch hier in Anwendung bringen kann. Es ist daher ein Weg da, um auch von diesen Reihen auf die zugehörigen Integrale zu kommen. Für die nächste Reihe mit drei Argumenten

$$\Sigma e^{am^2+bn^2+ck^2+2dnk+2ekm+2fmn+2um+2vn+2wk},$$

welche auf die Form,

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} . r^{k^2} e^{2kw} \varphi_{3,3}(u+2k\beta,\ v+2k\gamma,\ p,\ q,\ \alpha),$$

zurückkommt, wird sich die Sache mit Hülfe der für die Function φ schon gefundenen Formeln ohne gar zu grofse Schwierigkeit ausführen lassen. Indessen werde ich auf jeden Fall erst die Functionen φ von 2 Variabeln zu ergründen suchen; vielleicht eröffnet sich mir dadurch ein neuer Gesichtspunct für den Gegenstand. Der Weg, von den Reihen zu den Integralen überzugehen, wird bei einer gröfsern Anzahl Variabeln nicht etwa wegen der Methode, sondern wegen der ungeheuern Anzahl von Formeln, aus welchen man die passenden heraussuchen mufs, so sehr unangenehm. Schon bei den Functionen φ war die Aufgabe nicht ohne Schwierigkeit, und nur die Analogie mit den Functionen ϑ und die Vorarbeit über die dreifach periodischen Functionen setzten mich in den Stand, mich schneller in dem Labyrinthe von Formeln zurechtzufinden.

II.

Breslau den 13. Mai 1846.

Was die noch in Frage stehende Relation zwischen den Indices der vier Perioden betrifft, so habe ich versucht, ob die Ausdehnung des *Abel*schen Theorems auf Doppel-Integrale, welche Sie mir bei meiner Anwesenheit in Berlin mitzutheilen die Güte hatten, das geeignete Instrument zur Erledigung dieser Untersuchung sei. Es handelt sich hier freilich nur um die Vergleichung *zweier* Doppel-Integrale; allein die Ansätze können hiezu sehr verschieden gemacht werden, und es ist im Allgemeinen eine sehr verwickelte Aufgabe, über die Realität und die Grenzen der Intervalle der Wurzeln von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten Rechenschaft zu geben.

Bezeichnen X und Y die Ausdrücke,

$$X = (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)(a_5-x)(a_6-x)$$
$$Y = (a_1-y)(a_2-y)(a_3-y)(a_4-y)(a_5-y)(a_6-y),$$

so haben die Integrale, um welche es sich handelt, die Form

$$\iint\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(XY)}}.$$

Die Summe zweier solcher Integrale soll gleich 0 werden. Die zu integrirende Function ist aber in Bezug auf x und y symmetrisch. Setzt man daher

$$(x-a)(y-a) = t, \quad (x-b)(y-b) = u,$$

und führt statt x und y die neuen Variabeln t und u ein, so verwandelt sich das zu untersuchende Integral in

$$\iint\frac{dt\,du}{\sqrt{F(t,u)}},$$

wo $F(t,u)$ das Product aus 6 Factoren von der Form $A+Bt+Cu$ ist.

Zwei Gattungen von Ansätzen habe ich nun vorzüglich untersucht. Der eine ist von der Form:

$$f(x,y) = (a_1-x)(a_2-x)(\beta-y)^2-\gamma^2.(a_3-x)(a_4-x)(a_5-y)(a_6-y) = 0$$
$$\varphi(x,y) = (a_1-y)(a_2-y)(\beta-x)^2-\gamma^2.(a_3-y)(a_4-y)(a_5-x)(a_6-x) = 0,$$

wo $\varphi(x,y) = f(y,x)$. Für jedes Paar conjugirter Wurzeln x, y der beiden Gleichungen, $f=0$, $\varphi=0$, erhält man die Gleichung

$$\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(X.Y)}} = \frac{\gamma(x-y)^2\,d\beta\,d\gamma}{f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)}.$$

Die Ausdrücke

$$\frac{f(x,y)-\varphi(x,y)}{x-y}, \quad \frac{xf(x,y)-y\varphi(x,y)}{x-y}, \quad \frac{yf(x,y)-x\varphi(x,y)}{x-y}$$

werden aber symmetrische Functionen von x und y, d. h. ganze rationale Functionen der beiden Gröfsen

$$t = (x-a)(y-a), \quad u = (x-b)(y-b),$$

und zwar der erste Ausdruck in Bezug auf t und u vom ersten, die anderen beiden sind vom zweiten Grade. Ferner hat man

$$f'(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)f'(y) = (b-a)(x-y)^2\{\chi'(t)\psi'(u)-\psi'(t)\chi'(u)\},$$

wenn

$$\frac{f(x,y)-\varphi(x,y)}{x-y} = \chi(t,u),$$

$$\frac{xf(x,y)-y\varphi(x,y)}{x-y} = \psi(t,u)$$

gesetzt wird.

Aus der oben aufgestellten Differentialgleichung erhält man daher nach einem bekannten Verfahren die Summe zweier Integrale von der Form $\iint\frac{dt\,du}{\sqrt{(F(t,u))}}$ gleich 0, wenn man als Grenzen die Werthe nimmt, welche die beiden Wurzelpaare der Gleichungen

$$\chi(t,u) = 0, \quad \psi(t,u) = 0$$

für die Grenzwerthe der beiden variabeln Coëfficienten β und γ annehmen. Die Anzahl der Ansätze von dieser Form ist sehr grofs, weil man in denselben die Constanten $a_1, a_2, \ldots a_6$ auf sehr verschiedene Arten mit einander vertauschen kann. Ich habe aber unter ihnen keinen finden können, bei welchem die Grenzen der Integrale sämmtlich in die verlangten Intervalle zu liegen kommen.

In der anderen Gattung von Ansätzen, welche ich betrachtet habe, sind die Functionen $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ von der Form

$$f(x,y) = (a_1-x)(a_1-y)-m(a_2-x)(a_2-y)$$

$$\varphi(x,y) = (a_3-x)(a_3-y)(a_5-x)(a_5-y)-n.(a_4-x)(a_4-y)(a_6-x)(a_6-y),$$

wo m und n oder vielmehr $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$ die neuen Variabeln sind. Hier sind f und φ geradezu symmetrische Functionen von x und y und daher ganze

rationale Functionen von t und u: f vom *ersten* und φ vom *zweiten* Grade; mithin erhält man aus diesem Ansatze wiederum die Summe von nur 2 Integralen der angegebenen Form gleich 0. Er führt indefs eben so wenig zum gewünschten Ziele, als andere weniger regelmäfsige, an welchen ich mich ebenfalls längere Zeit versucht habe.

Ich entschlofs mich nun endlich, die Richtigkeit der in Frage stehenden Gleichung durch *Reihen-Entwicklung* zu prüfen. Ich hatte einige Scheu vor dieser Arbeit, weil die Methoden einer solchen Entwicklung nicht gerade auf der Hand liegen. Nicht ohne viele Mühe und nach mancher beschwerlichen Rechnung gelangte ich endlich zu den Reihen für die 8 einfachen Integrale, aus welchen sich die beiden zu untersuchenden Doppel-Integrale zusammensetzen, und hatte nun die Freude, die in Frage stehende Relation in den 4 ersten Gliedern, welche ich berechnet hatte, wirklich bestätigt zu finden.

Ich versuchte jetzt wieder auf's neue das *Abel*sche Theorm, das ich auf alle mir zu Gebote stehende Arten handhabte, auch durch andere Methoden, wie rationale Substitutionen, welche ich unmittelbar auf das Doppel-Integral $\iint \frac{dt\,du}{\sqrt{F(t,u)}}$ anzuwenden versuchte; aber vergeblich. Vielleicht ist der Weg, welchen ich eingeschlagen habe, ein ganz falscher. Denn es ist ja gar nicht nothwendig, dafs diese Relation zwischen den bestimmten Integralen sich aus einer Gleichung zwischen unbestimmten Integralen müsse ableiten, und diese letztere sich durch eine *algebraische* Relation zwischen den Variabeln müsse ersetzen lassen; und dies habe ich bei diesen Versuchen immer stillschweigend vorausgesetzt. Ich habe deshalb zuletzt die Methode anzuwenden versucht, welche *Legendre* zum Beweise der Relation zwischen den ganzen elliptischen Integralen von der ersten und zweiten Gattung gebraucht hat, nemlich die Differentiation nach den Moduln. Ich schreckte aber bald vor der Complication der Rechnung zurück.

Nun noch Einiges über die Art, wie ich die Reihen-Entwicklung angestellt habe. Wenn, wie vorher,

$$X = (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)(a_5-x)(a_6-x)$$
$$Y = (a_1-y)(a_2-y)(a_3-y)(a_4-y)(a_5-y)(a_6-y)$$

gesetzt wird, und

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

ist, so hat man nach Ihrem Theorem:

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{(-X)}}-\int_{a_3}^{a_4}\frac{dx}{\sqrt{(-X)}}+\int_{a_5}^{a_6}\frac{dx}{\sqrt{(-X)}}=0$$
$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{X}}-\int_{a_4}^{a_5}\frac{dx}{\sqrt{X}}+\int_{a_6}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{X}}=0$$
$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{(-X)}}-\int_{a_3}^{a_4}\frac{x\,dx}{\sqrt{(-X)}}+\int_{a_5}^{a_6}\frac{x\,dx}{\sqrt{(-X)}}=0$$
$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}-\int_{a_4}^{a_5}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\int_{a_6}^{a_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}=0,$$

und hieraus erhält man unmittelbar,

$$M=\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}-\int_{a_4}^{a_5}\int_{a_5}^{a_6}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}$$
$$=\int_{a_3}^{a_4}\int_{a_4}^{a_5}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}+\int_{a_6}^{a_1}\int_{a_1}^{a_2}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}$$
$$=\int_{a_5}^{a_6}\int_{a_6}^{a_1}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}-\int_{a_2}^{a_3}\int_{a_3}^{a_4}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}.$$

$M=0$ ist die Relation zwischen den ganzen Integralen, um welche es sich handelt. Für die canonische Form ist

$$a_1=\pm\infty,\quad a_2=0,\quad a_3=1,\quad a_4=\frac{1}{\varkappa^2},\quad a_5=\frac{1}{\lambda^2},\quad a_6=\frac{1}{\mu^2},$$

und daher werden, wenn

$$X=x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)=(x,\varkappa,\lambda,\mu)$$

gesetzt wird, die drei Formen des Ausdrucks M folgende:

$$M=\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{1}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}-\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}$$

$$M=\int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}+\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu)(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}$$

$$M=\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}-\int_{0}^{1}\int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu)(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}.$$

Ich habe nun die dritte Form des Ausdrucks M gewählt und sie nach Potenzen von $\lambda^2-\mu^2$ entwickelt. Zur Reihen-Entwicklung habe ich mich

einer von ***Dirichlet*** bei den elliptischen Integralen angewandten Methode bedient, welche mir ***Joachimsthal*** vor längerer Zeit mitgetheilt hat. Sie beruht auf der Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2} = \frac{\pi}{2ab}.$$

Sind nämlich a und b irrationale Functionen von x, z. B. $a = \sqrt{(1-x^2)}$, $b = \sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2))}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\varphi\, dx}{(1-x^2)\cos\varphi^2 + (1-\varkappa^2 x^2)\sin\varphi^2}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\varphi\, dx}{1 - x^2 \Delta^2(\varphi, \varkappa_1)}.$$

Die Integration wird nun zuerst in Bezug auf x ausgeführt; dann wird nach Potenzen von $\varkappa_1^2 = 1 - \varkappa^2$ entwickelt und jeder einzelne Term der Entwicklung in Bezug auf φ integrirt; und so erhält man die von ***Legendre*** gegebene Entwicklung von $F^1 = K$ für den Fall, wo $\varkappa$ nahe an 1 liegt.

Ich bin in meinem Falle von dem dreifachen Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(\alpha + \beta x^2)\, d\varphi\, d\psi\, dx}{(A^2 \cos\varphi^2 + B^2 \sin\varphi^2)(C^2 \cos\psi^2 + D^2 \sin\psi^2)} = \tfrac{1}{4}\pi^2 \int_{x_0}^{x} \frac{(\alpha + \beta x^2)\, dx}{ABCD}$$

ausgegangen, indem ich

$$A^2 = x^2 - 1, \quad B^2 = \varkappa^2 x^2 - 1, \quad C^2 = \mu^2 x^2 - 1, \quad D^2 = \lambda^2 x^2 - 1$$

gesetzt habe. Nachdem linker Hand die Integration in Bezug auf x zuerst ausgeführt ist, theilt sich das Integral in zwei Theile. Der eine ist in Bezug auf φ, der andere in Bezug auf ψ von der Form

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2},$$

so dafs nur noch eine Integration für jeden Theil zu leisten ist, welche erst nach der Entwicklung an den einzelnen Termen ausgeführt wird. Ich habe auf diese Art das Integral

$$2\int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta x^2)\, dx}{\sqrt{((x^2-1)(\varkappa^2 x^2 - 1)(\lambda^2 x^2 - 1)(\mu^2 x^2 - 1))}} = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}}$$

nach Potenzen von $\lambda^2 - \mu^2$ bis zu $(\lambda^2 - \mu^2)^3$ incl. entwickelt. Die Entwicklung der ganzen Integrale in den Grenzen 0 und 1, 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ nach Potenzen von $\lambda^2 - \mu^2$ macht weniger Schwierigkeit. Der logarithmische Theil,

welcher in der Entwicklung von $\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu)}}$ enthalten ist, fällt bei dem Doppel-Integral

$$\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu)(y,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu))}}$$

weg, und die Entwicklung dieses Integrals nach Potenzen von $\lambda^2-\mu^2$ stimmt in den 4 ersten Gliedern, welche ich berechnet habe, mit der Entwicklung von

$$\int_0^1 \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu)(y,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu))}}$$

vollkommen überein.

III.

Breslau, den 21. Mai 1847.

Meine Concurrenzschrift hat die Devise aus Göthes Iphigenie:

Das Wenige verschwindet leicht dem Blick,
Der vorwärts sieht, wie viel noch übrig bleibt.

Sie werden dieselbe um so passender finden, wenn ich Ihnen sage, dafs ich mit der Arbeit eigentlich nicht ganz fertig geworden bin, sondern mich habe beeilen müssen, um nur noch den Beweis mit aufnehmen zu können, dafs die fast zu ausführlich behandelte Transcendente φ wirklich auf das hyperelliptische Integral führt.

Der Gang, den ich in meiner Abhandlung genommen habe, ist kurz folgender.

In einer kurzen Einleitung erörtere ich zuerst den Stand der Frage, und setze auseinander, dafs ich das Problem nicht direct, wie es gewöhnlich gestellt wird, angegriffen, und die inversen Functionen der hyperelliptischen Integrale gesucht, sondern mir aus den Zählern und Nennern der dreifach periodischen Functionen zweier Variabeln, welche die inversen Functionen der elliptischen Integrale der dritten Gattung sind, neue Transcendenten nach demselben Gesetz gebildet habe, nach welchem sich die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen aus dem Zähler und Nenner der einfach periodischen Function tangφ zusammensetzen. Die Quotienten von je 2 dieser neuen Transcendenten, bemerke ich, seien Functionen von 2 Variabeln mit 4facher Periodicität, und daher sei die Untersuchung derselben und ihrer inversen Functionen an und für sich von Interesse. Sie liefsen sich eben so behandeln, wie die Functionen ϑ, und ich hätte nun umgekehrt als ihre inversen Functionen, durch die von Ihnen für die Functionen ϑ gegebene Methode, die erste Gattung der hyperelliptischen Integrale der ersten Classe gefunden.

Zur Sache selbst übergehend, entwickle ich ganz kurz Ihre Formeln zwischen den Functionen ϑ, mit 4 verschiedenen Argumenten, wobei ich mich der Zeichen Ihrer Vorlesungen bediene. Darauf leite ich mit Hülfe dieser Formeln die Ausdrücke der dreifach periodischen Functionen ab, welche die inversen Functionen der elliptischen Integrale der dritten Gattung sind. Dann bilde ich aus der Function

$$e^{2v}\vartheta_3(w+2A,\,q)+e^{-2v}\vartheta_3(w-2A,\,q),$$

welche einen der Zähler der dreifach periodischen Functionen bildet, mit Hülfe

eines neuen Moduls p, die Reihe

$$\varphi_{3,3}(v, w, p, q, A) = 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} p^{m^2}\{e^{2mv}\vartheta_3(w+2mA, q) + e^{-2mv}\vartheta_3(w-2mA, q)\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2} e^{2mv}\vartheta_3(w+2mA, q)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2nw}\vartheta_3(v+2nA, p)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2\log p + n^2\log q + 4mnA + 2mv + 2nw}.$$

Dieses Bildungsgesetz ist demjenigen analog, nach welchem die Function

$$\vartheta_3(w, q) = 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}(e^{2mw} + e^{-2mw})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2} e^{2mw} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{m^2\log q + 2mw}$$

aus der Function $e^{2w} + e^{-2w}$ mit Hülfe eines Moduls q gebildet wird. Von den übrigen 15 Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$, wo r und s irgend einen der 4 Indices 0, 1, 2, 3 bedeuten, erwähne ich vor der Hand nur, dafs sie Alle dieselbe Form

$$\sum\sum e^{m^2\log p + n^2\log q + 4mnA + 2ma + 2nb + c}$$

haben, wo a, b, c lineäre Functionen von v und w sind.

Ich behandle darauf die Function $\varphi_{3,3}(v, w)$ auf ähnliche Art, wie Sie in den Vorlesungen die Transcendenten $\vartheta_3(v)$ behandelt haben. Ich zeige, dafs $\varphi_{3,3}(v, w)$ zwei Perioden hat, deren *conjugirte Indices* 0 und $i\pi$ und $i\pi$ und 0 sind; dann, dafs eben so $e^{\frac{w^2}{\log p}}\varphi_{3,3}(v, w)$ und $e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{3,3}(v, w)$ doppelt periodische Functionen sind, und zwar die erstere mit den conjugirten Indices $\log p$ und $2A$, 0 und $i\pi$, die letztere dagegen mit den Index-Paaren $i\pi$ und 0, $2A$ und $\log q$; endlich, wenn

$$\frac{v^2\log q + w^2\log p - 4Avw}{\log p\log q - 4A^2} = f(v, w)$$

gesetzt wird, dafs

$$e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{f(v+m\log p+2nA,\, w+2m+An\log q)}$$

ebenfalls doppelt periodisch ist, indem die beiden Paare conjugirter Indices $\log p$ und $2A$, $2A$ und $\log q$ sind.

Setzt man

$$\frac{v\log q - 2Aw}{\log p\log q - 4A^2} = V, \quad \frac{w\log p - 2Av}{\log p\log q - 4A^2} = W,$$

mithin

$$V\log p+2AW = v, \qquad W\log q+2AV = w,$$

so kann man $f(v, w)$ auch noch auf folgende Arten ausdrücken:

$$\begin{aligned} f(v,w) &= V^2\log p+W^2\log q+4AVW \\ &= \frac{v^2}{\log p}+\frac{\log p\log q-4A^2}{\log p}W^2 \\ &= \frac{w^2}{\log q}+\frac{\log p\log q-4A^2}{\log q}V^2. \end{aligned}$$

Drückt man daher $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v, w)$ durch V und W aus, so werden in Bezug auf diese Variabeln die beiden Paare der conjugirten Indices 1 und 0, 0 und 1.

Die Ausdrücke von $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v, w)$ in v und W und in w und V sind folgende:

$$e^{\frac{v^2}{\log p}+\frac{\log p\log q-4A^2}{\log p}W^2}\varphi_{3,3}(v,w) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\log p\log q-4A^2}{\log p}(W+n)^2}.e^{\frac{(v+2nA)^2}{\log p}}\vartheta_3(v+2nA,p)$$

$$e^{\frac{w^2}{\log q}+\frac{\log p\log q-4A^2}{\log q}V^2}\varphi_{3,3}(v,w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\log p\log q-4A^2}{\log q}(V+m)^2}.e^{\frac{(w+2mA)^2}{\log q}}\vartheta_3(w+2mA,q).$$

In dem ersteren gehören zu den Indices $\log p$ und $2A$ von v die Indices 0 und 1 von W, in dem letzteren zu den Indices $\log q$ und $2A$ von w die Indices 0 und 1 von V. Ich benutze diese beiden Formeln, oder eigentlich nur eine von ihnen, zur Ableitung der Reductionsformeln von

$$\varphi_{3,3}(iv, w), \quad \varphi_{3,3}(v, iw), \quad \varphi_{3,3}(iv, iw),$$

wo $i = \sqrt{-1}$, auf Functionen $\varphi_{3,3}$ mit reellen Argumenten, und erhalte mit Hülfe Ihres Theorems

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\vartheta_3(v,p) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\log p}\right)}.\vartheta_3(iv', p'),$$

wo

$$\log p\log p' = \pi^2, \quad v' = \frac{\pi v}{\log p}, \quad v = \frac{\pi v'}{\log p'},$$

folgende drei, diesem entsprechende Theoreme:

Theorem I.

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\varphi_{3,3}(v, w, p, q, A) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\log p}\right)}.\varphi_{3,3}(iv', w', p', q', A')$$

$$\pi^2 = \log p \log p' = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log q}.\frac{\log p' \log q' - 4A'^2}{\log q'}$$

$$\log q' = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log p}, \quad \log q = \frac{\log p' \log q' - 4A'^2}{\log p'}$$

$$A' = \frac{i\pi A}{\log p}, \quad v' = \frac{\pi v}{\log p}, \quad w' = \frac{w \log p - 2Av}{\log p}$$

$$iA = \frac{\pi A'}{\log p'}, \quad v = \frac{\pi v'}{\log p'}, \quad w = \frac{w' \log p' - 2iA'v'}{\log p'}.$$

Das zweite Theorem ergiebt sich von selbst aus dem ersten durch Vertauschung von v und w, p und q, und das dritte setzt sich aus dem ersten und zweiten zusammen. Ich glaube indefs, es wird Ihnen nicht unangenehm sein, wenn ich die Formeln auch für diese Theoreme hinschreibe.

Theorem II.

$$e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{3,3}(v, w, p, q, A) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\log q}\right)}.\varphi_{3,3}(v_1, iw_1, p_1, q_1, A_1)$$

$$\pi^2 = \log q \log q_1 = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log p}.\frac{\log p_1 \log q_1 - 4A_1^2}{\log p_1}$$

$$\log p_1 = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log q}, \quad \log p = \frac{\log p_1 \log q_1 - 4A_1^2}{\log q_1}$$

$$A_1 = \frac{i\pi A}{\log q}, \quad w_1 = \frac{\pi w}{\log q}, \quad v_1 = \frac{v \log q - 2Aw}{\log q}$$

$$iA = \frac{\pi A_1}{\log q_1}, \quad w = \frac{\pi w_1}{\log q_1}, \quad v = \frac{v_1 \log q_1 - 2iA_1 w_1}{\log q_1}.$$

Theorem III.

$$e^{f(v,w,p,q,A)}\varphi_{3,3}(v,w,p,q,A) = \frac{\pi}{\sqrt{(\log p \log q - 4A^2)}}\varphi_{3,3}(iv'_1, iw'_1, p'_1, q'_1, A'_1)$$

$$\pi^2 - 4AA'_1 = \log p \log p'_1 = \log q \log q'_1$$

$$A \log p'_1 + A'_1 \log q = 0, \quad A \log q'_1 + A'_1 \log p = 0$$

$$\pi^4 = (\log p \log q - 4A^2)(\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1)$$

$$\log p'_1 = \frac{\pi^2 \log q}{\log p \log q - 4A^2}, \quad \log p = \frac{\pi^2 \log q'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1}$$

$$\log q'_1 = \frac{\pi^2 \log p}{\log p \log q - 4A^2}, \quad \log q = \frac{\pi^2 \log p'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1}$$

$$A'_1 = \frac{-\pi^2 A}{\log p \log q - 4A^2}, \quad A = \frac{-\pi^2 A'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1}$$

$$v' = \pi\frac{v\log q - 2Aw}{\log p \log q - 4A^2} = \frac{v \log p'_1 + 2A'_1 w}{\pi}$$

$$v = \pi\frac{v'_1 \log q'_1 - 2A'_1 w'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1} = \frac{v'_1 \log p + 2Aw'_1}{\pi}$$

$$w'_1 = \pi\frac{w\log p - 2Av}{\log p \log q - 4A^2} = \frac{w \log q'_1 + 2A'_1 v}{\pi}$$

$$w = \pi\frac{w'_1 \log p'_1 - 2A'_1 v'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1} = \frac{w'_1 \log p + 2Av'_1}{\pi}$$

$$f(v,w,p,q,A) = f(v'_1, w'_1, p'_1, q'_1, A'_1)$$

$$= \frac{v^2\log q + w^2 \log p - 4Avw}{\log p \log q - 4A^2} = \frac{v'^2_1 \log p + w'^2_1 \log q + 4Av'_1 w'_1}{\pi^2}.$$

Nachdem ich noch bemerkt habe, dafs man in allen diesen Formeln $\log p$, $\log q$, $2A$ um gerade Vielfache von $i\pi$ ändern kann, und auch um ungerade, wenn nur gleichzeitig $2v$ und $2w$ um dieselben geändert werden (ganz ebenso, wie Sie es in Ihren Vorlesungen bei den Functionen ϑ gemacht haben), dafs man also, wenn man eine analytische Transformation von $\varphi_{3,3}(v,w)$ gefunden hat, welche von der Theilung eines Index, z. B. des Index $i\pi$ abhängt, mit Hülfe dieser drei Theoreme zu den übrigen gelangen kann, welche von der Theilung der andern Indices selbst, oder der Summen von Vielfachen dieser Indices abhängen, wende ich mich zu den Formeln *für die analytische Transformation der Function* $\varphi_{3,3}(v,w)$.

Diese finde ich, nach der von Ihnen in dem Briefe an *Hermite* für die Functionen ϑ angegebenen Methode, durch Bildung des Products

$$\prod_{h=1}^{h=n} \varphi(v+a_h,\ w+b_h,\ p,\ q,\ A) = P(v,\ w,\ p,\ q,\ A).$$

Nachdem ich zunächst $P(v, w, p, q, A)$ unter 4 verschiedenen Formen erhalten habe, verallgemeinere ich diese, indem ich v und w um $n$te Theile der Indices vermehre. Dadurch entstehen folgende 4 Hauptformeln:

$$1.\quad P\left(v+\frac{ki\pi}{n},\ w+\frac{li\pi}{n},\ p,\ q,\ A\right)$$

$$= \sum_\beta\sum_\gamma A_{\beta,\gamma}\, e^{\frac{\beta k+\gamma l}{n}2i\pi+2\beta v+2\gamma w}\,\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} nv+\Sigma a_h+\beta\log p+2\gamma A, \\ nw+\Sigma b_h+2\beta A+\gamma\log q, \\ p^n,\ q^n,\ nA \end{Bmatrix}$$

$$2.\quad \frac{\beta^2}{p^n}\,\frac{\gamma^2}{q^n}\, e^{2\beta\left(v+\frac{\Sigma a_h}{n}+\frac{\gamma A}{n}\right)+2\gamma\left(w+\frac{\Sigma b_h}{n}+\frac{\beta A}{n}\right)}\, P\begin{Bmatrix} v+\frac{\beta}{n}\log p+\frac{\gamma}{n}2A, \\ w+\frac{2\beta A}{n}+\frac{\gamma}{n}\log q, \\ p,\ q,\ A \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_k\sum_l e^{-\frac{k\beta+l\gamma}{n}2i\pi}\, B_{k,l}\,\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{li\pi}{n}, \\ p^{\frac{1}{n}},\ q^{\frac{1}{n}},\ \frac{A}{n} \end{Bmatrix}$$

$$3.\quad \frac{\beta^2}{p^n}\, e^{2\beta\left(v+\frac{1}{n}\Sigma a_h\right)}\, P\left(v+\frac{\beta}{n}\log p,\ w+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n},\ p,\ q,\ A\right)$$

$$= \sum_k\sum_\gamma e^{-\frac{k\beta-\gamma l}{n}2i\pi}\, C_{k,\gamma}\, e^{2\gamma w}\,\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ nw+\ \Sigma b_h+\gamma\log q, \\ p^{\frac{1}{n}},\ q^n,\ A \end{Bmatrix}$$

$$4.\quad \frac{\gamma^2}{q^n}\, e^{2\gamma\left(w+\frac{1}{n}\Sigma b_h\right)}\, P\begin{Bmatrix} v+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+\frac{\gamma}{n}\log q, \\ p,\ q,\ A \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_\beta\sum_l e^{\frac{\beta k-l\gamma}{n}2i\pi}\, D_{\beta,l}\, e^{2\beta v}\,\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} nv+\ \Sigma a_h+\ \beta\log p, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n}, \\ p^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ A \end{Bmatrix}$$

Die Summen Σa_h, Σb_h sind in Bezug auf h von 1 bis n zu nehmen; die übrigen Summen in Bezug auf β, γ, k, l sämmtlich von 0 bis $n-1$. Wenn sie nicht als Summen-Indices stehen, bezeichnen diese Buchstaben irgend eine der n Zahlen von 0 bis $n-1$.

Vermittelst der bekannten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit erhält man aus diesen Formeln durch Umkehrung folgende 4 Gleichungen:

$$1.\quad n^2 A_{\beta,\gamma} e^{2\beta v+2\gamma w}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} nv+\Sigma a_h+\beta\log p+2\gamma A, \\ nw+\Sigma b_h+2\beta A+\gamma\log q, \\ p^n,\; q^n,\; nA \end{Bmatrix} = \sum_k\sum_l e^{-\frac{k\beta+l\gamma}{n}2i\pi}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+a_h+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+b_h+\frac{li\pi}{n}, \\ p,\; q,\; A \end{Bmatrix}$$

$$2.\quad n^2 B_{k,l}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{li\pi}{n}, \\ p^{\frac{1}{n}},\; q^{\frac{1}{n}},\; \frac{A}{n} \end{Bmatrix}$$

$$=\sum_\beta\sum_\gamma\left\{p^{\frac{\beta^2}{n}}q^{\frac{\gamma^2}{n}}e^{2\beta\left[v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{ki\pi}{n}+\frac{\gamma A}{n}\right]+2\gamma\left[w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{li\pi}{n}+\frac{\beta A}{n}\right]}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+a_h+\frac{\beta\log p+2\gamma A}{n}, \\ w+b_h+\frac{2\beta A+\gamma\log q}{n}, \\ p,\; q,\; A \end{Bmatrix}\right\}$$

$$3.\quad n^2 C_{k,\gamma}e^{2\gamma w}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ nw+\Sigma b_h+\gamma\log q, \\ p^{\frac{1}{n}},\; q^n,\; A \end{Bmatrix}$$

$$=\sum_\beta\sum_l e^{\frac{\beta k-l\gamma}{n}2i\pi}p^{\frac{\beta^2}{n}}e^{2\beta\left(v+\frac{1}{n}\Sigma a_h\right)}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+a_h+\frac{\beta}{n}\log p, \\ w+b_h+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n}, \\ p,\; q,\; A \end{Bmatrix}$$

$$4.\quad n^2 D_{\beta,l}e^{2\beta v}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} nv+\Sigma a_h+\beta\log p, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n}, \\ p^n,\; q^{\frac{1}{n}},\; A \end{Bmatrix}$$

$$=\sum_k\sum_\gamma e^{\frac{\gamma l-k\beta}{n}2i\pi}q^{\frac{\gamma^2}{n}}e^{2\gamma\left(w+\frac{1}{n}\Sigma b_h\right)}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\begin{Bmatrix} v+a_h+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+b_h+\frac{\gamma}{n}\log q, \\ p,\; q,\; A \end{Bmatrix}$$

Diese Formeln dienen nun zunächst dazu, die constanten Coëfficienten

$$A_{\beta,\gamma},\quad B_{k,l},\quad C_{k,\gamma},\quad D_{\beta,l}$$

durch Functionen $\varphi_{3,3}$ mit constanten Argumenten und verschiedenen Moduln auszudrücken; dann aber sind sie die Quelle der directen und inversen Transformation der hyperelliptischen Integrale von der ersten Classe. Ich habe indefs dies nur flüchtig erwähnt, weil ich eilen mufste, um den Zusammenhang der Transcendenten $\varphi_{r,s}$ mit den Integralen nachzuweisen, und habe in der eingeschickten Arbeit die eben mitgetheilten Formeln nur dazu benutzen können, um die Werthe von

$$\varphi'_{r,1}(v)_0\varphi'_{3,1}(w)_0 - \varphi'_{r,1}(w)_0\varphi'_{3,1}(v)_0$$

durch die Functionen $\varphi_{r,s}$, in denen beide Argumente 0 sind, auszudrücken. Für die einzelnen Gröfsen

$$\varphi'_{r,1}(v)_0,\quad \varphi'_{r,1}(w)_0$$

habe ich keine Ausdrücke durch die Functionen $\varphi_{r,s}$ allein finden können, wohl aber für die Functionaldeterminante von je zweien. Die unten angehängte 0 soll bedeuten, dafs v und w nach der Differentiation 0 gesetzt werden.

Was $\varphi_{r,s}(v,w)$ bedeutet, werden Sie sich vielleicht noch erinnern. Sollte es nicht der Fall sein, so schreibe ich Ihnen hier zwei Formeln hin, aus welchen die Bedeutung hervorgeht:

$$\varphi_{r,3}(v,w) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}e^{2nw}\vartheta_r(v+2nA,p)$$

$$\varphi_{3,s}(v,w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2}e^{2mv}\vartheta_s(w+2mA,q),$$

wo r und s irgend welche von den 4 Indices 0, 1, 2, 3 sind.

Die Werthe, welche ich für die betreffenden Functional-Determinanten gefunden habe, will ich Ihnen kurz angeben. Ich setze

$$\varphi'_{r,1}(v)_0\varphi'_{s,1}(w)_0 - \varphi'_{r,1}(w)_0\varphi'_{s,1}(v)_0 = D_{r,s,1} = -D_{s,r,1}$$

$$\varphi'_{1,r}(v)_0\varphi_{1,s}(w)_0 - \varphi'_{1,r}(w)_0\varphi'_{1,s}(v)_0 = D_{1,r,s} = -D_{1,s,r}$$

$$\varphi'_{r,1}(v)_0\varphi'_{1,s}(w)_0 - \varphi'_{r,1}(w)_0\varphi'_{1,s}(v)_0 = D_{r,1,s},$$

und erhalte dann

$$D_{3,0,1} = \varphi_{1,1}\varphi_{2,0}\varphi_{2,2}\varphi_{2,3};\quad D_{2,0,1} = \varphi_{1,1}\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3};\quad D_{2,3,1} = \varphi_{1,1}\varphi_{0,0}\varphi_{0,2}\varphi_{0,3}$$

$$D_{1,0,3} = \varphi_{1,1}\varphi_{0,2}\varphi_{2,2}\varphi_{3,2};\quad D_{1,0,2} = \varphi_{1,1}\varphi_{0,3}\varphi_{2,3}\varphi_{3,3};\quad D_{1,3,2} = \varphi_{1,1}\varphi_{0,0}\varphi_{2,0}\varphi_{3,0}$$

$$-D_{0,1,2} = \varphi_{0,0}\varphi_{2,2}\varphi_{3,2}\varphi_{0,3};\quad -D_{0,1,3} = \varphi_{0,0}\varphi_{2,3}\varphi_{3,3}\varphi_{0,2};\quad -D_{2,1,3} = \varphi_{2,2}\varphi_{3,3}\varphi_{2,0}\varphi_{0,3}$$

$$-D_{2,1,0} = \varphi_{0,0}\varphi_{2,2}\varphi_{2,3}\varphi_{3,0};\quad -D_{3,1,0} = \varphi_{0,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}\varphi_{2,0};\quad -D_{3,1,2} = \varphi_{2,2}\varphi_{3,3}\varphi_{0,2}\varphi_{3,0}$$

$$-D_{0,1,0} = \varphi_{0,2}\varphi_{2,0}\varphi_{0,3}\varphi_{3,0};\quad -D_{2,1,2} = \varphi_{0,2}\varphi_{2,0}\varphi_{2,3}\varphi_{3,2};\quad -D_{3,1,3} = \varphi_{0,3}\varphi_{3,0}\varphi_{2,3}\varphi_{3,2}.$$

Durch fortgesetzte Anwendung der Transformation zweiter Ordnung erhält man nämlich

$$\frac{D_{3,0,1}(p,\,q,\,A)}{D_{3,0,1}(p^{4^\mu},\,q,\,2^\mu A)} = \frac{(\varphi_{1,1}.\varphi_{2,0}.\varphi_{2,2}.\varphi_{2,3})(p,\,q,\,A)}{(\varphi_{1,1}.\varphi_{2,0}.\varphi_{2,2}.\varphi_{2,3})(p^{4^\mu},\,q,\,2^\mu A)},$$

wo ich, wie bisher, $\varphi_{r,s}$ für $\varphi_{r,s}(0, 0)$ geschrieben und die verschiednen Systeme der Moduln hinzugefügt habe. Für μ gleich ∞ erhält man hieraus den oben gegebenen Werth von $D_{3,0,1}$. Die übrigen Ausdrücke ergeben sich dann mit Hülfe der Formeln zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}$ mit 4 verschiedenen Argumentenpaaren und denselben Moduln, welche zugleich, wie in Ihrer Behandlung der Theorie der elliptischen Functionen, die Quelle der allgemeinen Additionsformeln sind.

Den folgenden Theil meiner Arbeit kennen Sie schon, und ich kann mich daher in Bezug auf ihn kürzer fassen. Nachdem ich die andern 15 Functionen $\varphi_{r,s}(v,\,w,\,p,\,q,\,A)$ definirt habe, wende ich mich zur Ableitung der zuletzt genannten Formeln, wozu ich die von Ihnen für die Functionen ϑ gegebenen benutze, welche ich, wie schon bemerkt, zum Behufe der Darstellung der dreifach periodischen Functionen gleich Anfangs hergeleitet hatte. Sind, wie in Ihren Vorlesungen,

$$v_1,\; v_1',\; v_1'',\; v_1'''$$

die linearen Functionen von $v,\, v',\, v'',\, v'''$, welche der Gleichung

$$v_1^2+v_1'^2+v_1''^2+v_1'''^2 = v^2+v'^2+v''^2+v'''^2$$

genügen, und sind

$$w_1,\; w_1',\; w_1'',\; w_1'''$$

dieselben Functionen von $w,\, w',\, w'',\, w'''$, und

$$M_1,\; M_1',\; M_1'',\; M_1'''$$

dieselben Functionen von $M,\, M',\, M'',\, M'''$, so habe ich in meiner Abhandlung nur ein System von 4 oder 8 Formeln gegeben, welche sich in die einzige,

$$(a.)\qquad M^2+M'^2+M''^2+M'''^2 = M_1^2+M_1'^2+M_1''^2+M_1'''^2,$$

zusammenfassen lassen, und worin jedes $M,\, M',\, M'',\, M'''$ die Summe von

2 Producten aus 4 Functionen $\varphi_{r,s}$ ist, welche der Reihe nach die Argumente

$$v, \; w; \; v', \; w'; \; v'', \; w''; \; v''', \; w'''$$

haben. Die Gröfsen M_1, M_1', M_1'', M_1''' sind ähnliche Ausdrücke aus Functionen $\varphi_{r,s}$ mit den Argumenten

$$v_1, \; w_1; \; v_1', \; w_1'; \; v_1'', \; w_1''; \; v_1''', \; w_1'''.$$

Die Ordnung der Gröfsen M, M', M'', M''' und M_1, M_1', M_1'', M_1''' habe ich stets so gewählt, dafs sie den Gleichungen

$$(b.) \quad \begin{cases} 2M_1 = M+M'+M''+M''' \\ 2M_1' = M+M'-M''-M''' \\ 2M_1'' = M-M'+M''-M''' \\ 2M_1''' = M-M'-M''+M''' \end{cases}$$

genügen. Es reichte daher hin, in der Formeltafel, welche ich meiner Abhandlung beigefügt habe, die Gröfsen $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ unter der symbolischen Bezeichnung

$$(A.) \quad \begin{cases} M^{(r)} = a^{(r)}m \,.\, b^{(r)}m' \,.\, c^{(r)}m'' \,.\, d^{(r)}m''' \pm a^{(r)}n \,.\, b^{(r)}n' \,.\, c^{(r)}n'' \,.\, d^{(r)}n''' \\ M_1^{(r)} = a_1^{(r)}m_1 \,.\, b_1^{(r)}m_1' \,.\, c_1^{(r)}m_1'' \,.\, d_1^{(r)}m_1''' \pm a_1^{(r)}n_1 \,.\, b_1^{(r)}n_1' \,.\, c_1^{(r)}n_1'' \,.\, d_1^{(r)}n_1''' \end{cases}$$

aufzuführen. Die durch Puncte getrennten Paare von Buchstaben bedeuten die Indices t und s der Functionen $\varphi_{t,s}$, aus denen sich die Ausdrücke $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ zusammensetzen, so dafs man unmittelbar

$$M^{(r)} = \varphi_{a^{(r)},m}(v, w) \,.\, \varphi_{b^{(r)},m'}(v', w') \,.\, \varphi_{c^{(r)},m''}(v'', w'') \,.\, \varphi_{d^{(r)},m'''}(v''', w''')$$
$$\pm \varphi_{a^{(r)},n}(v, w) \,.\, \varphi_{b^{(r)},n'}(v', w') \,.\, \varphi_{c^{(r)},n''}(v'', w'') \,.\, \varphi_{d^{(r)},n'''}(v''', w''')$$

hat, und eben so den Ausdruck für $M_1^{(r)}$, wenn man die Indices und die Argumente der Functionen φ unten mit einem Strich versieht.

Jede Seite meiner Tafel enthält nun 2 Columnen mit Ziffer-Ausdrücken von der Form $(A.)$. In der ersten Columne gehören je 4 Zeilen, von denen jede einen Ausdruck $(A.)$ enthält, zu demselben System von Werthen $M^{(r)}$ und an der Seite von jeder solchen Gruppe von 4 Zeilen lieset man der Reihe nach

$$M \text{ et } M_1; \quad M' \text{ et } M_1'; \quad M'' \text{ et } M_1''; \quad M''' \text{ et } M_1'''.$$

In der ersten Columne befinden sich nämlich die Materialien zu denjenigen

Formeln, in welchen die Indices der Functionen $\varphi_{\iota,\iota}(v, w)$ in den Ausdrücken von $M_1^{(r)}$ und $M^{(r)}$ der Reihe nach dieselben sind. In der zweiten Columne dagegen gehören 8 aufeinanderfolgende Zeilen zu zwei Systemen (*b.*), und an den Eingängen einer solchen Gruppe von 8 Zeilen befinden sich der Reihe nach die Inschriften

$$M \text{ ou } M_1; \quad M' \text{ ou } M_1'; \quad M'' \text{ ou } M_1''; \quad M''' \text{ ou } M_1''';$$

$$M_1 \text{ ou } M; \quad M_1' \text{ ou } M'; \quad M_1'' \text{ ou } M''; \quad M_1''' \text{ ou } M'''.$$

Der erste Buchstabe jeder Inschrift gehört zu dem einen, der zweite zu dem andern der Systeme (*b.*), welche in der Tafel durch die Gruppe von 8 Zeilen repräsentirt werden, und von denen also eines aus dem andern dadurch hervorgeht, dafs man die 4 Argumentenpaare $v^{(r)}$, $w^{(r)}$ mit den 4 Argumentenpaaren $v_1^{(r)}$, $w_1^{(r)}$ vertauscht. Je zwei aufeinanderfolgende Gruppen von 4 Zeilen der ersten Columne und die danebenstehende Gruppe von 8 Zeilen in der zweiten Columne sind mit derselben Nummer bezeichnet und die darin enthaltnen 4 Systeme von je 4 Gröfsen durch die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* von einander unterschieden. Dies ist deshalb geschehen, weil sie nothwendig zusammengehören. Hat man nemlich für das erste der beiden Systeme, deren Elemente in den 2 mal 4 Zeilen der ersten Columne enthalten sind,

$$M^{(r)} = A^{(r)} + B^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = A_1^{(r)} + B_1^{(r)},$$

und für das zweite

$$M^{(r)} = C^{(r)} - D^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = C_1^{(r)} - D_1^{(r)},$$

so ist für das eine von den in den danebenstehenden 8 Zeilen der zweiten Columne enthaltnen beiden Systeme,

$$M^{(r)} = A^{(r)} - B^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = C_1^{(r)} + D_1^{(r)},$$

und für das andere,

$$M^{(r)} = C^{(r)} + D^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = A_1^{(r)} - B_1^{(r)}.$$

Die 4 mit derselben Nummer bezeichneten Systeme ergeben sich aus einem von ihnen. Wenn man nämlich in demselben $w''' + i\pi$ für w setzt, erhält man ein zweites, und aus den beiden so erhaltnen Systemen ergeben sich die beiden andern, wenn man darin w, w', w'' um $\frac{1}{2}i\pi$ vermehrt, w''' aber um dieselbe Gröfse vermindert. Ich glaube, dafs diese Einrichtung der Tafel ganz angemessen ist.

Die Art, wie man von den Gleichungen von der Form ($a.$) zu den Integralen gelangt, kennen Sie. Ich beschränke mich also darauf, Ihnen mitzutheilen, dafs ich aus den genannten Formeln zuerst die Modulargleichungen oder vielmehr die algebraischen Relationen zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}(0,0)$ ableite; dann die algebraischen Relationen zwischen den Gröfsen $\varphi_{r,s}(v,w)$ selbst. Für die Quotienten der ersteren gebe ich die Ausdrücke durch 3 Moduln $\varkappa$, λ, μ, für die Quotienten der letzteren ihre Ausdrücke durch zwei Variabeln x_1 und x_2, von denen sie symmetrische Functionen sind. Endlich zeige ich, dafs diese Gröfsen x_1 und x_2 die Variabeln der 4 hyperelliptischen Integrale erster Gattung sind, und zwar von so beschaffenen Integralen, dafs die Summe von je zweien mit demselben Zähler eine ganze lineäre Function der beiden Argumente v und w ist.

IV.

Breslau, den 22ten Februar 1849.

Nach mannigfachen vergeblichen Versuchen ist es mir endlich am vergangenen Sonntage gelungen, die Ihnen bekannte Relation zwischen den bestimmten ganzen *Abel*schen Integralen auf die eleganteste und kürzeste Art zu beweisen, und zwar *ganz allgemein für den Fall, in welchem die Gröfse unter dem Wurzelzeichen auf den $2n^{ten}$ Grad steigt.*

Es sei

$$\begin{aligned} F(t) &= (t-\alpha_1)(t-\alpha_2) \quad \dots (t-\alpha_n) \\ F_1(t) &= (t-\alpha_{n+1})(t-\alpha_{n+2}) \dots (t-\alpha_{2n}) \\ \varphi(t) &= (t-t_1)(t-t_2) \quad \dots (t-t_{n-1}) \\ \varphi_1(t) &= (t-t_{n+1})(t-t_{n+2}) \dots (t-t_{2n-1}), \end{aligned}$$

ferner bezeichne man das Product aus den Differenzen der Gröfsen $x_1, x_2, \dots x_m$ mit

$$\begin{aligned} \Pi(x_1, x_2, \dots x_m) = (x_2-x_1)(x_3-x_1) & \dots (x_m-x_1) \\ (x_3-x_2) & \dots (x_m-x_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & (x_m-x_{m-1}). \end{aligned}$$

Die in den Functionen $F, F_1, \varphi, \varphi_1$ vorkommenden Constanten α_m, t_m sollen der Gröfse nach geordnet sein, so dafs sie mit zunehmendem Index wachsen. Es sei ferner

$$\alpha_m < t_m < \alpha_{m+1},$$

für alle Werthe des Index m von $m=1$ bis $m=n-1$ und von $m=n+1$ bis $m=2n-1$, so dafs also mit Ausnahme der beiden Intervalle zwischen α_n und α_{n+1} und zwischen α_{2n} über $\pm\infty$ bis α_1, in jedem Intervall, α_m bis α_{m+1}, ein Werth t_m liegt.

Setzt man daher

$$U = \int^{n-1} \frac{\Pi(t_1, t_2, \dots t_{n-1})\, dt_1\, dt_2 \dots dt_{n-1}}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} F(t_1)F_1(t_1).F(t_2)F_1(t_2)\dots F(t_{n-1})F_1(t_{n-1}))}}$$

$$V = \int^{n-1} \frac{\Pi(t_{n+1}, t_{n+2}, \dots t_{2n-1})\, dt_{n+1}\, dt_{n+2} \dots dt_{2n-1}}{\sqrt{((-)^{\frac{1}{2}n(n-1)} F(t_{n+1})F_1(t_{n+1}).F(t_{n+2})F_1(t_{n+2})\dots F(t_{2n-1})F_1(t_{2n-1}))}},$$

so bleiben zufolge der gemachten Annahme die Gröfsen unter dem Wurzelzeichen immer positiv.

Wird die Integration in Beziehung auf jede der Variabeln t_m über das ganze Intervall von $t_m = \alpha_m$ bis $t_m = \alpha_{m+1}$ ausgedehnt, so will ich dies da-

durch andeuten, dafs ich setze

$$U = \begin{bmatrix} 2, 3, \ldots n \\ 1, 2, \ldots n-1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} n+2, n+3, \ldots 2n \\ n+1, n+2, \ldots 2n-1 \end{bmatrix}.$$

In diesen Zeichen ausgedrückt, stellt sich die Relation, welche bewiesen werden soll, so dar:

$$\begin{bmatrix} 2, 3, \ldots n \\ 1, 2, \ldots n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+2, n+3, \ldots 2n \\ n+1, n+2, \ldots 2n-1 \end{bmatrix}.$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, führe ich statt der beiden Systeme von Variabeln t_ρ symmetrische Functionen derselben ein, und zwar für jedes der beiden Systeme von je $n-1$ Variabeln ein System von n Variabeln, welche die Bedingung erfüllen, dafs die Summe ihrer Quadrate gleich 1 sei.

Es sei

$$\frac{x_1^2}{t-\alpha_1} + \frac{x_2^2}{t-\alpha_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{t-\alpha_n}$$

$$= \frac{\varphi(t)}{F(t)} = \frac{t-t_1 \,.\, t-t_2 \ldots t-t_{n-1}}{t-\alpha_1 \,.\, t-\alpha_2 \ldots t-\alpha_{n-1} \,.\, t-\alpha_n},$$

$$\frac{y_1^2}{t-\alpha_{n+1}} + \frac{y_2^2}{t-\alpha_{n+2}} + \cdots + \frac{y_n^2}{t-\alpha_{2n}}$$

$$= \frac{\varphi_1(t)}{F_1(t)} = \frac{t-t_{n+1} \,.\, t-t_{n+2} \ldots t-t_{2n-1}}{t-\alpha_{n+1} \,.\, t-\alpha_{n+2} \ldots t-\alpha_{2n-1} \,.\, t-\alpha_{2n}},$$

so hat man

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1,$$

und, wenn m eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeutet,

$$x_m^2 = \frac{\varphi(\alpha_m)}{F'(\alpha_m)}$$

$$y_m^2 = \frac{\varphi_1(\alpha_{n+m})}{F_1'(\alpha_{n+m})},$$

wo

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \qquad \frac{dF_1(x)}{dx} = F_1'(x)$$

gesetzt ist.

Liegen die Variabeln t_m in den angegebenen Intervallen, d. h. ist

$$\alpha_m < t_m < \alpha_{m+1},$$

so sind sämmtliche x_p^2 und y_p^2 positiv. Umgekehrt: sind die letzteren $2n$ Gröfsen sämmtlich positiv, so folgt aus bekannten Betrachtungen, dafs die $2n$ Wurzeln t_m der beiden Gleichungen,

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(t) = 0,$$

sämmtlich reell sind und in den angegebenen Intervallen liegen.

Da nun jedem System der positiven Gröfsen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$, deren Summe $= 1$ ist, immer nur *ein* System der Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ entspricht, welche in den angegebnen Intervallen liegen, und umgekehrt, jedem System der Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, welche in den angegebnen Intervallen liegen, immer nur *ein* System positiver Gröfsen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ entspricht, deren Summe $= 1$ ist, so folgt, dafs wenn die Integration in Bezug auf $t_1, t_2, \cdots t_{n-1}$ über die ganzen Intervalle ausgedehnt wird, in welchen diese Gröfsen liegen, sie auch über alle positiven Gröfsen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ ausgedehnt werden mufs, deren Summe $= 1$ ist, und umgekehrt. Dasselbe gilt in Bezug auf die Gröfsen $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n}$ und die Gröfsen $y_1^2, y_2^2, \ldots y_n^2$.

Zum Behuf der Transformation der beiden vielfachen Integrale hat man, wenn $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die neuen unabhängigen Variabeln sind, die Gleichungen:

$$\frac{\partial x_m}{\partial t_p} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{t_p - \alpha_m}\sqrt{\frac{\varphi(\alpha_m)}{F'(\alpha_m)}},$$

$$T_p \frac{\partial t_p}{\partial x_m} = \frac{2x_m}{t_p - \alpha_m} - \frac{2x_m}{t_p - \alpha_n},$$

oder auch

$$\frac{\partial t_p}{\partial x_m} = \frac{2(\alpha_n - \alpha_m)}{T_p(\alpha_n - t_p)(t_p - \alpha_m)}\sqrt{\frac{\varphi(\alpha_m)}{F'(\alpha_m)}},$$

wo

$$T_p = -\frac{\varphi'(t_p)}{F(t_p)} = \frac{x_1^2}{(t_p - \alpha_1)^2} + \frac{x_2^2}{(t_p - \alpha_2)^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{(t_p - \alpha_n)^2}.$$

In diesen Formeln bedeuten p und m einen der Indices $1, 2, \ldots n-1$. Man erhält aus denselben die entsprechenden Gleichungen für die n Gröfsen y_m, wenn man y statt x setzt, die Indices der Gröfsen t, T, α um n vermehrt, und φ, F in φ_1, F_1 verwandelt.

Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich die Werthe der Functionaldeterminanten durch die Gleichungen,

$$\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\cdots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\frac{\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}}\,\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$
$$T_1\,T_2\ldots T_{n-1}\,\Sigma\pm\frac{\partial t_1}{\partial x_1}\frac{\partial t_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$
$$=2^{n-1}\sqrt{\frac{\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}}\;\frac{F'(\alpha_n)}{\varphi(\alpha_n)}\,\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}.$$

Die Quadratwurzel soll positiv genommen und das Zeichen der Determinanten so bestimmt werden, dafs sie positive Werthe erhalten.

Den Werth der Determinante

$$\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$

in passender Form kann man entweder aus den von Ihnen in der Abhandlung „De functionibus alternantibus" (*Crelle,* Bd. XXII.) bekannt gemachten Eigenschaften der alternirenden Functionen, oder aus dem Satze ableiten, dafs das Product zweier reciproken Functionaldeterminanten gleich 1 ist.

Auf dem erstgenannten Wege findet man

$$\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$
$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Pi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})\,\Pi(t_1,t_2,\ldots t_{n-1})}{\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})},$$

wofür man auch

$$\Sigma\pm\frac{1}{(t_1-\alpha_1)(t_2-\alpha_2)\ldots(t_{n-1}-\alpha_{n-1})}$$
$$=\frac{\Pi(t_1,t_2,\ldots t_{n-1})}{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}\sqrt{\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F'(\alpha_1)\,F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_n)}}$$

setzen kann; denn es ist

$$F'(\alpha_1).F'(\alpha_2)\;\ldots\;F'(\alpha_{n-1})F'(\alpha_n)$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(\Pi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n))^2$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(\Pi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{n-1}))^2\,(F'(\alpha_n))^2.$$

Der Beweis der obigen Formel ergiebt sich durch die Betrachtung, dafs

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\;\ldots\;\varphi(\alpha_{n-1})\,\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$

eine ganze rationale alternirende Function sowohl in Bezug auf die $n-1$ Gröfsen t_p als auch in Bezug auf die $n-1$ Gröfsen α_m ist. Es übersteigt aber

in dieser Function weder eine der Gröfsen t_p noch eine der Gröfsen α_m den $(n-2)$ten Grad; daher ist sie nicht blofs durch das Product

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})$$

theilbar, sondern, abgesehen vom Zeichen, diesem Producte selbst gleich, da ihre einzelnen Terme keine andern Zahlencoëfficienten haben, als ± 1. Da nun die Determinante positiv sein soll, so mufste rechts vom Gleichheitszeichen noch der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ hinzugefügt werden.

Auf die andere Art erhält man zunächst

$$T_1.T_2 \ldots T_{n-1} = \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}\cdot\frac{F'(\alpha_n)}{\varphi(\alpha_n)}\left(\Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\ldots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}\right)^2,$$

mithin, weil

$$\begin{aligned} T_1.T_2 \ldots T_{n-1} &= (-1)^{n-1}\frac{\varphi'(t_1)\varphi'(t_2)\ldots\varphi'(t_{n-1})}{F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1})} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{(\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}))^2}{F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1})}, \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{(\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}))^2}{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})\varphi(\alpha_n)}, \end{aligned}$$

ebenso, wie vorhin,

$$\begin{aligned} &\Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\ldots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}\sqrt{\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_n)}}. \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Werth der Determinante, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_n}\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\ldots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n))}} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1}))}}. \end{aligned}$$

Man wird daher in dem ersten, mit U bezeichneten Integral unter dem Integralzeichen setzen können,

$$\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})dt_1.dt_2\ldots dt_{n-1}}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1}))}} = 2^{n-1}\frac{dx_1.dx_2\ldots dx_{n-1}}{x_n}.$$

Ganz auf dieselbe Weise sieht man, dafs man in dem mit V bezeichneten Integral unter dem Integralzeichen zu setzen hat,

$$\frac{\Pi(t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n-1})dt_{n+1}.dt_{n+2}\ldots dt_{2n-1}}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F_1(t_{n+1})F_1(t_{n+2})\ldots F_1(t_{2n-1}))}} = 2^{n-1}\frac{dy_1.dy_2\ldots dy_{n-1}}{y_n}.$$

Damit nun die beiden Integrale, deren Gleichheit bewiesen werden soll, aus diesen Gleichungen hervorgehen, ist der erste der beiden vorstehenden

Differentialausdrücke noch durch die Quadratwurzel aus

$$F_1(t_1).F_1(t_2) \,..\, F_1(t_{n-1}) = \varphi(\alpha_{n+1}).\varphi(\alpha_{n+2}) \,..\, \varphi(\alpha_{2n-1})\varphi(\alpha_{2n})$$

zu dividiren, der zweite durch die Quadratwurzel aus

$$F(t_{n+1}).F(t_{n+2}) \,..\, F(t_{2n-1}) = \varphi_1(\alpha_1)\varphi_1(\alpha_2) \,..\, \varphi_1(\alpha_{n-1})\varphi_1(\alpha_n).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\varphi(\alpha_{n+p})}{F(\alpha_{n+p})} = M_p, \quad -\frac{\varphi_1(\alpha_p)}{F_1(\alpha_p)} = N_p,$$

so wird

$$M_1 M_2 \,..\, M_n = \frac{F_1(t_1)F_1(t_2)\,..\,F_1(t_{n-1})}{R^2}$$

$$N_1 N_2 \,..\, N_n = \frac{F(t_{n+1})F(t_{n+2})\,..\,F(t_{2n+1})}{R^2},$$

wo

$$R^2 = F(\alpha_{n+1})F(\alpha_{n+2}) \,..\, F(\alpha_{2n}) = (-1)^{n'}F_1(\alpha_1)F_1(\alpha_2) \,..\, F_1(\alpha_n)$$

gesetzt ist. Nach der oben gewählten Bezeichnungsart wird also endlich

$$\frac{R}{2^{n-1}}.\begin{bmatrix}2,\ 3,\ ..\ n \\ 1,\ 2,\ ..\ n-1\end{bmatrix} = \int^{n-1} \frac{dx_1.dx_2\,..\,dx_n}{x_n\sqrt{(M_1.M_2\,..\,M_n)}}$$

$$\frac{R}{2^{n-1}}.\begin{bmatrix}n+2,\ n+3,\ ..\ 2n \\ n+1,\ n+2,\ ..\ 2n-1\end{bmatrix} = \int^{n-1} \frac{dy_1.dy_2\,..\,dy_n}{y_n\sqrt{(N_1.N_2\,..\,N_n)}},$$

und es ist daher zu beweisen, dafs

$$\int^{n-1} \frac{dx_1.dx_2\,..\,dx_n}{x_n\sqrt{(M_1.M_2\,..\,M_n)}} = \int^{n-1} \frac{dy_1.dy_2\,..\,dy_n}{y_n\sqrt{(N_1.N_2\,..\,N_n)}},$$

wo die Integration über alle positiven Werthe von x_1, x_2, .. x_{n-1} und von y_1, y_2, .. y_{n-1} zu erstrecken ist, welche den Gleichungen,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1,$$

genügen. Dieser Beweis ergiebt sich aber sogleich, wenn man mittelst einer Ihrer Formeln jede der Gröfsen unter dem Integralzeichen wiederum durch ein $(n-1)$faches bestimmtes Integral ausdrückt.

Es ist nämlich

$$M_p = \frac{\varphi(\alpha_{n+p})}{F(\alpha_{n+p})} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{x_m^2}{\alpha_{n+p}-\alpha_m}$$

$$N_p = -\frac{\varphi_1(\alpha_p)}{F_1(\alpha_p)} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{y_m^2}{\alpha_{n+m}-\alpha_p}.$$

Schreibt man daher die n, in Bezug auf die n Variabeln x_1^2, x_2^2, .. x_n^2 linearen Ausdrücke von M_1, M_2, .. M_n und ebenso die n, in Bezug auf die n Variabeln

$y_1^2, y_2^2, \ldots y_n^2$ lineären Ausdrücke von $N_1, N_2, \ldots N_n$, wie Systeme von n lineären Gleichungen untereinander, so unterscheiden sich die Coëfficienten der zwei Systeme nur dadurch, dafs die Horizontalreihen in dem einen System die Verticalreihen in dem Andern bilden. Hieraus folgt die identische Gleichung,

$$\begin{aligned} & M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \cdots + M_n y_n^2 \\ = \; & N_1 x_1^2 + N_2 x_2^2 + \cdots + N_n x_n^2. \end{aligned}$$

Es ist daher identisch

$$\int^{2n-2} \frac{dx_1 . dx_2 \ldots dx_{n-1} . dy_1 . dy_2 \ldots dy_{n-1}}{x_n y_n (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots + M_n y_n^2)^{\frac{1}{2}n}} = \int^{2n-2} \frac{dx_1 . dx_2 \ldots dx_{n-1} . dy_1 . dy_2 \ldots dy_{n-1}}{x_n y_n (N_1 x_1^2 + N_2 x_2^2 + \ldots + N_n x_n^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Die Gröfsen

$$M_1, M_2, \ldots M_n; \quad N_1, N_2, \ldots N_n$$

sind, wie man aus ihren oben gegebenen Ausdrücken ersieht, sämmtlich positiv. Dehnt man die Integration über alle positiven Werthe der Variabeln aus, welche den Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

genügen, so kann man, mit Hülfe der von Ihnen in der Abhandlung „De binis quibusl. functionibus etc." (*Crelle,* XII. S. 60) gefundenen Gleichung (15.),

$$\int^{n-1} \frac{dy_1 . dy_2 \ldots dy_{n-1}}{y_n (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots + M_n y_n^2)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{S}{\sqrt{(M_1 . M_2 \ldots M_n)}},$$

wo S eine Zahl bedeutet,

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi_1^{n-2} d\varphi_1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi_2^{n-3} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi_{n-2} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi_{n-1},$$

die Integration links vom Gleichheitszeichen in Bezug auf die $(n-1)$ Variabeln y_p, rechts vom Gleichheitszeichen in Bezug auf die $(n-1)$ Variabeln x_p wirklich ausführen, und erhält so unmittelbar die zu beweisende Gleichheit.

Ich bin begierig, von Ihnen zu erfahren, ob Sie auf diesem von mir eingeschlagenen Wege oder auf einem andern zu dem Beweise der Relation zwischen den vielfachen Integralen gelangt sind.

Für $n = 2$ kommt diese Gleichung zwischen den transformirten $(n-1)$ fachen Integralen zurück auf die bekannte Relation,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dt}{\sqrt{(-(t_1-\alpha_1)(t_1-\alpha_2)(t_1-\alpha_3)(t_1-\alpha_4))}} = \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{dt_2}{\sqrt{(-(t_2-\alpha_1)(t_2-\alpha_2)(t_2-\alpha_3)(t_2-\alpha_4))}},$$

welche auch aus einer Gleichung zwischen unbestimmten Integralen gefolgert

werden kann. die einer algebraischen Relation entspricht. Hierdurch wird es mir doch wieder wahrscheinlich, dafs die Relation zwischen den bestimmten Integralen auch für andere Werthe von n aus einer zwischen unbestimmten, welche einer algebraischen Relation entspricht, wird abgeleitet werden können, was ich so lange durch die verschiedenartigsten Mittel vergeblich versucht habe.

Für die elliptischen Integrale läfst sich die algebraische Relation, welche die Stelle der transcendenten vertritt, so darstellen:

$$0 = (\alpha_3-\alpha_2)x_1^2y_2^2-(\alpha_4-\alpha_1)y_1^2x_2^2$$

oder

$$x_1^2:y_1^2 = M_1:N_1,$$

folglich

$$x_2^2:y_2^2 = M_2:N_2;$$

alles in den oben definirten Zeichen. Man könnte allgemein die Substitution,

$$x_m^2:y_m^2 = M_m:N_m,$$

untersuchen, und zusehen, welche unbestimmte Transformationen sich durch dieselben leisten lassen. Ich bemerke deshalb, dafs diese Substitution die identische Gleichung,

$$M_1y_1^2+M_2y_2^2+\cdots+M_ny_n^2 = N_1x_1^2+N_2x_2^2+\cdots+N_nx_n^2,$$

auch abgesehen von den Werthen von M_m und N_m in x und y, identisch erfüllt.

Aufser der gefundnen Relation,

$$\begin{bmatrix}2, 3, 4, \ldots n \\ 1, 2, 3, \ldots n-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n+2, n+3, \ldots 2n \\ n+1, n+2, \ldots 2n-1\end{bmatrix},$$

giebt es noch $(n-1)$ andere von derselben Art, *welche sich allgemein durch die Gleichung*

$$\begin{bmatrix}r+2, r+3, \ldots r+n \\ r+1, r+2, \ldots r+n-1\end{bmatrix}$$
$$= (-1)^{n(r-1)}\begin{bmatrix}r+n+2, r+n+3, \ldots 2n, & 1, 2, 3, \ldots r \\ r+n+1, r+n+2, \ldots 2n-1, 2n, & 1, 2, \ldots r-1\end{bmatrix}$$

darstellen lassen, wo r eine von den Zahlen 1, 2, 3, .. $n-1$ *bedeutet.* Wenn man diese Relation auf dieselbe Art wie die oben gefundene ableiten wollte, so würde dies wegen der Grenzen der Integration Schwierigkeiten haben. Weil nämlich dann einige von den Variablen y_m^2 negativ werden, so könnte man die von Ihnen gegebene Gleichung nicht mehr benutzen. Allein die eine Relation reicht hin, um alle übrigen zu finden. Man hat hierzu nur

nöthig, nach dem Vorgange von *Richelot,* jedes einzelne der Integrale, welche die zwei Gruppen von je $(n-1)^2$ einfachen Integralen bilden, aus denen sich die beiden Seiten der gefundenen Gleichung als Determinanten zusammensetzen, durch *dieselbe* lineäre gebrochene Substitution zu transformiren, oder mit andern Worten: „man transformirt beide $(n-1)$fache Integrale durch die Substitution,

$$t_m = \frac{a+bv_m}{c+dv_m},$$

wo a, b, c, d Constanten sind und die Gröfsen v_m die neuen Variablen bedeuten."

Ich will allgemein setzen:

$$t = \frac{a+bv}{c+dv}, \quad \text{woraus} \quad -v = \frac{a-ct}{b-dt}.$$

Durchläuft t alle Werthe von α_1 bis α_{2n}, so erhält es in den $2n-1$ verschiedenen Intervallen die $(2n-1)$ Werthe $t_1, t_2, \ldots t_{2n-1}$, welche mit Ausschlufs von t_n die $2n-2$ Variablen der Integration sind. Dem Werthe t_m soll v_m entsprechen.

Man hat nun

$$\frac{dt}{dv} = \frac{bc-ad}{(c+dc)^2}.$$

Es sei

$$bc-ad > 0,$$

so wird v mit t zugleich wachsen und abnehmen. Es ist ferner

$$t-\alpha_m = \frac{a-\alpha_m c+(b-\alpha_m d)v}{c+dv}.$$

Ich setze

$$\beta_{r+m} = -\frac{a-\alpha_m c}{b-\alpha_m d} = -\frac{c}{d}+\frac{bc-ad}{d^2}\frac{1}{\frac{b}{d}-\alpha_m},$$

wo r eine von den Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ bedeuten, und für $r+m$, wenn es gröfser als $2n$ ist, $r+m-2n$ gesetzt werden soll. Es wird dann

$$t-\alpha_m = \frac{b-\alpha_m d}{c+dv}(v-\beta_{r+m}).$$

Wie man sieht, ist β_{r+m} der Werth, den v für $t=\alpha_m$ annimmt. Die Reihe der Werthe von β_{r+m} wird also, von β_{r+1} angefangen, für fortschreitende Werthe des Index m so lange wachsen, bis das Intervall $\alpha_k \ldots \alpha_{k+1}$ erreicht

ist, in welchem $\frac{b}{d}$ liegt. Es sei $k = 2n - r$, so dafs also

$$\alpha_{2n-r} < \frac{b}{d} < \alpha_{2n-r+1}.$$

Dann ist offenbar

$$\beta_{2n} = -\frac{a - \alpha_{2n-r}c}{b - \alpha_{2n-r}d}$$

die gröfste, und die nächstfolgende, dem α_{2n-r+1} entsprechende, nämlich

$$\beta_{2n+1} = \beta_1 = -\frac{a - \alpha_{2n-r+1}c}{b - \alpha_{2n-r+1}d},$$

die kleinste in der Reihe der $2n$ Gröfsen β_h. Es ist ferner

$$\beta_{r-m+1} = -\frac{a - \alpha_{2n-m+1}c}{b - \alpha_{2n-m+1}d}.$$

Nach dieser Beziehungsart hat man $\beta_h > \beta_{h+1}$ für jeden Werth von h von 1 bis $2n$ und es ist die Integration für die neue Variable v_m von β_{r+m} bis β_{r+m+1} anzustellen, wo für die Indices $r+m$ und $r+m+1$ die kleinsten positiven Zahlen zu setzen sind, welche ihnen in Bezug auf den Modul $2n$ congruent sind.

Bemerkt man die Gleichungen,

$$\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}) = \frac{(bc-ad)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}\Pi(v_1, v_2, \ldots v_{n-1})}{(c+dv_1)^{n-2}(c+dv_2)^{n-2}\ldots(c+dv_{n-1})^{n-2}}$$

$$\Pi(t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n-1}) = \frac{(bc-ad)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}\Pi(v_{n+1}. v_{n+2} \ldots v_{2n-1})}{(c+dv_{n+1})^{n-2}(c+dv_{n+2})^{n-2}\ldots(c+dv_{2n-1})^{n-2}}$$

$$dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} = \frac{(bc-ad)^{n-1}dv_1 dv_2 \ldots dv_{n-1}}{(c+dv_1)^2(c+dv_2)^2\ldots(c+dv_{n-1})^2}$$

$$dt_{n+1}dt_{n+2}\ldots dt_{2n-1} = \frac{(bc-ad)^{n-1}dv_{n+1}dv_{n+2}\ldots dv_{2n-1}}{(c+dv_{n+1})^2(c+dv_{n+2})^2\ldots(c+dv_{2n-1})^2},$$

so sieht man leicht, dafs die beiden $(n-1)$fachen Integrale U und V, welche einander gleich gefunden sind, sich in ganz ähnliche verwandeln, in denen nur die Gröfsen t und α durch die Gröfsen v und β ersetzt sind, von denen die letzteren wieder mit zunehmendem Index wachsen. Aber wenn früher t_m zwischen den Grenzen α_m und α_{m+1} zu nehmen war, ist jetzt v_m zwischen den Grenzen β_{r+m} und β_{r+m+1} zu nehmen. Man erhält also in der That,

$$\begin{bmatrix} r+2, r+3, \ldots r+n \\ r+1, r+2, \ldots r+n-1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{n(r-1)}\begin{bmatrix} r+n+2, r+n+3, \ldots 2n, & 1, & 2, 3, \ldots r \\ r+n+1, r+n+2, \ldots 2n-1, & 2n, & 1, 2, \ldots r-1 \end{bmatrix},$$

wo das Vorzeichen so bestimmt ist, dafs beide Integrale dasselbe Zeichen erhalten.

Für $n=3$ ergeben sich aus diesen Formeln die verlangten Relationen,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{(t_2-t_1)dt_1\,dt_2}{\sqrt{(F(t_1)F_1(t_1)F(t_2)F_1(t_2))}} = \int_{\alpha_4}^{\alpha_5}\int_{\alpha_5}^{\alpha_6}\frac{(t_5-t_4)dt_4\,dt_5}{\sqrt{(F(t_4)F_1(t_4)F(t_5)F_1(t_5))}}$$

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\frac{(t_2-t_1)dt_1\,dt_2}{\sqrt{(F(t_1)F_1(t_1)F(t_2)F_1(t_2))}} = \int_{\alpha_5}^{\alpha_6}\int_{\alpha_6}^{\alpha_1}\frac{(t_5-t_4)dt_4\,dt_5}{\sqrt{(F(t_4)F_1(t_4)F(t_5)F_1(t_5))}}$$

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\int_{\alpha_4}^{\alpha_5}\frac{(t_2-t_1)dt_1\,dt_2}{\sqrt{(F(t_1)F_1(t_1)F(t_2)F_1(t_2))}} = -\int_{\alpha_6}^{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{(t_5-t_4)dt_4\,dt_5}{\sqrt{(F(t_4)F_1(t_4)F(t_5)F_1(t_5))}},$$

von denen sich indefs 2 aus der dritten schon vormöge der 4 Gleichungen zwischen den 12 einfachen ganzen Integralen ergeben.

Wie es sich in dieser Beziehung mit den Gleichungen zwischen den allgemeinen $(n-1)$fachen Integralen verhält, wie viele von ihnen nämlich neue, von den bis jetzt zwischen den $2n(n-1)$ ganzen Integralen bekannten $2(n-1)$ Relationen unabhängige Gleichungen darstellen, habe ich bis jetzt noch nicht ermittelt, und auch noch kein elegantes, übersichtliches Verfahren gefunden, um für den allgemeinen Fall aus jenen $2(n-1)$ von Ihnen zwischen den einfachen ganzen Integralen gefundenen Relationen zu den $(n-1)$fachen überzugehn. Für $n=3$ liegen die Combinationen, welchen man die $2(3-1)=4$ Gleichungen zu unterwerfen hat, um zu einer Relation zwischen *vier* von den hier betrachteten Doppel-Integralen zu gelangen, auf der Hand. Im Allgemeinen aber scheint es mir schwierig, diese Combinationen zu ermitteln.

Ich vermuthe, dafs wenn m ein Factor von $2n$ ist, allgemein die Gleichung

$$0=\begin{bmatrix}2,3,\,..\,m\\1,2,\,..\,m-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m+2,\;m+3,\,..\,2m\\m+1,\;m+2,\,..\,2m-1\end{bmatrix}+\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{2n}{m}-1}\begin{bmatrix}2n-m+2,\;2n-m+3,\,..\,2n\\2n-m+1,\;2n-m+2,\,..\,2n-1\end{bmatrix}$$

Statt findet, und Ihre Gleichungen zwischen den einfachen ganzen Integralen nur der specielle Fall von dieser für $m=2$ sind; ein ähnliches Verhältnifs wie zwischen den beiden elliptischen ganzen Integralen und den oben gegebenen Relationen zwischen den $(n-1)$fachen. Aber meine Versuche, dieses zu beweisen, sind bis jetzt noch vergeblich gewesen.

Erlauben Sie mir noch einige Bemerkungen in Bezug auf Ihre Abhandlung im 15ten Bande des mathematischen Journals „De integralibus qui-

busdam etc.", deren beide Theoreme, welche mir von grofser Wichtigkeit scheinen, einer doppelten Verallgemeinerung fähig sind.

1) In den nach p und q und nach x und y zu integrirenden zwei Functionen,

$$\frac{U}{P'(r)N} \quad \text{und} \quad \frac{U}{\Pi'(z)O},$$

sind N^2 und O^2 als Functionen respective von p, q, r und von x, y, z durch die zwischen den 6 Variablen angenommenen Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ bestimmt, welche in Bezug auf jedes der beiden Systeme von drei Variablen homogen sind, wofern nur $\mu\Pi+1$ und $\nu P+1$ homogene Functionen respective von den beiden Systemen Variabeln sind, Π von der μten und P von der νten Dimension. Diese Bedingung allein giebt schon die auf Seite 196 Ihrer Abhandlung gefundenen Gleichungen,

$$\begin{aligned} N.x &= f'(y)\varphi'(z)-f'(z)\varphi'(y) \\ N.y &= f'(z)\varphi'(x)-f'(x)\varphi'(z) \\ N.z &= f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x), \end{aligned}$$

aus welchen Sie den Ausdruck von N^2 in $p, q, r,$ unabhängig von den Gleichungen $P=0$, $\Pi=0$, ableiten. Es wäre nun die Aufgabe, diese Gleichungen $P=0$, $\Pi=0$ so zu specialisiren, dafs man eine Gleichung zwischen Integralen von einfacher Form erhält. Interessant ist z. B. der Fall, wo man für $P=0$, $\Pi=0$, statt der Gleichungen zweier Kugeln, entweder die Gleichungen einer *Kugel* und eines *Rotationshyperboloïds*, oder die Gleichungen *zweier verschiedenen Gattungen angehörigen Rotationshyperboloïde* annimmt. Diese Annahme giebt sehr merkwürdige Gleichungen zwischen Doppel-Integralen.

2) Indem man die erweiterte Definition von Π und P beibehält, kann man die in Rede stehenden Theoreme auf eine beliebige Anzahl von Variablen ausdehnen. Nimmt man nämlich zwischen n Variablen $n-2$ homogene Gleichungen von der *ersten* und eine von der *zweiten* Ordnung an, deren Coëfficienten in beliebigen $n-2$ der vorgelegten $n-1$ Gleichungen *lineäre* homogene Functionen von n andern Variablen, in der $(n-1)$ten dieser Gleichungen aber homogene Functionen der *zweiten* Ordnung von denselben Variablen sind, so erhält man $n-1$ ähnliche Theoreme für $(n-1)$fache Integrale. Der Gang ist genau derselbe, wie der in Ihrer Abhandlung genommene. Man findet die Werthe von N^2 und O^2 als ganze rationale Functionen von je einem der beiden Systeme von n Variablen durch Elimination des andern Systems aus n lineären Gleichungen, von welchen $n-2$ die $n-2$ gegebenen

lineären Gleichungen selbst sein können, die andern beiden aber jede einen Coëfficienten von der Form $A-N$ haben. Man hat dann nur zu beweisen, dafs im Resultat der Elimination die erste Potenz von N verschwindet. Statt der mechanischen Rechnung, die sich für $n=3$ noch durchführen läfst, müssen natürlich hier wieder allgemeine Schlufsfolgerungen zum Ziele führen, zu denen Ihre Abhandlung über die Determinanten reichliches Material liefert. Ich behalte mir den allgemeinen Beweis noch vor. Bis jetzt habe ich die Sache nur durch Induction gefunden; es ist aber wohl kein Zweifel, dafs der Satz allgemein gilt, da er für $n=3$ und $n=4$ Statt findet.

Es wäre mir sehr erwünscht, wenn Sie Ihre Arbeiten über das auf Doppel-Integrale ausgedehnte *Abel*sche Additionstheorem bekannt machten, und dabei dasselbe ähnlich behandelten, wie das Theorem über einfache Integrale im 32ten Bande dieses Journals S. 220 u. ff. Die Art, wie Sie dort das Additionstheorem behandeln, hat nämlich das voraus, dafs sie auch diejenigen Gleichungen liefert, welche den elliptischen von der Form

$$\varkappa'^2 = \Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u' \, \Delta \operatorname{am}(u+u') - \varkappa^2 \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u' \cos \operatorname{am}(u+u')$$

$$\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u' = \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} u' \, \Delta \operatorname{am}(u+u') + \cos \operatorname{am}(u+u')$$

entsprechen. Bezeichnet man nämlich mit u_m nicht die Summe der Combinationen der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{Ry^2+2Sy+T}{y} = 0,$$

sondern den Werth, den der erste Theil dieser Gleichung für $x=\alpha_m$ annimmt, und ist $x-\alpha_m$ ein Factor von $SS-RT$, so wird

$$yu_m = (m+uy)^2,$$

und man erhält daher auf die in der Abhandlung angegebene Art,

$$\varkappa_m \sqrt{(u_1)} + \lambda_m \sqrt{(u_2)} + \mu_m \sqrt{(u_m)} = 0.$$

Verschwindet endlich in S^2-RT der Coëfficient der höchsten Potenz von x, d. i. von x^{2n}, so wird auch y ein vollständiges Quadrat von der Form $(m+ny)^2$, und die Gleichung 2ten Grades nimmt die Form,

$$A\sqrt{(u_1)} + B\sqrt{(u_2)} = 1,$$

an.

Betrachtet man die Variabeln als Functionen der Integrale, so erhält man durch Vermehrung der Argumente um halbe Indices aus jeder dieser Gleichungen eine gewisse Anzahl anderer, in welchen aber die Functionen

der Summe beider Argumente unverändert geblieben sind. Diese kann man daher aus je zwei dieser Gleichungen ohne Mühe finden. Die Gleichung

$$A\sqrt{(u_1)} + B\sqrt{(u_2)} = 1$$

entspricht übrigens vollkommen der ersten von den zwei oben gegebenen elliptischen Formeln.

Ich schliefse endlich diesen etwas langen Brief, weil ich mich beeilen mufs, den Beweis der zwischen den bestimmten Integralen Statt findenden Relation der Pariser Akademie als ein Nachtrag zu meiner Arbeit zu übersenden, da der darin gegebene Beweis nicht für streng gehalten werden dürfte.

29.

Bemerkungen zur Integration der Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.

(Von Herrn Professor *Minding*.)

(Gelesen in der Sitzung der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg am 6ten Juni 1845 und aus dem Bulletin tome IV. S. 378 mitgetheilt.)

Unter den Hülfsmitteln, welche man bis jetzt für diese Integration gefunden hat, dürfte die Benutzung particulärer Integrale eines der umfassendsten sein; wenigstens wird durch sie die Lösung der schwierigsten unter den von *Euler* in den Inst. calc. int. aufgestellten Beispielen wesentlich erleichtert und gewinnt ein mehr methodisches Ansehen. Dahin gehört z. B. das 55te Problem (S. 207 des ersten Bandes), in welchem die Integration der Gleichung $ydy+(a+bx+nxx)dy=y(c+nx)dx$ gefordert und durch eine Substitution geleistet wird, von welcher *Euler* am Schlusse selbst sagt: „Casu autem hic vix praevidendo evenit, ut haec substitutio ad votum successerit; neque hoc problema magnopere juvabit." Diese Gleichung ist neuerlich von *Jacobi* im 24ten Bande dieses Journals in erweiterter Gestalt behandelt worden; aber durch Aufsuchung und Benutzung particulärer Integrale läfst sich ihre Integration noch sehr vereinfachen.

Es seien M und N zwei ganze Polynome in y, deren Coëfficienten beliebige Functionen von x sind, und $Mdx+Ndy=0$ sei die vorgelegte Gleichung. Hat man eine gewisse Anzahl (μ) particulärer Integrale dieser Gleichung, nämlich $y_1, y_2, \ldots y_\mu$, und sind M_μ und N_μ die Werthe von M und N, welche sich durch Einsetzung von y_μ für y ergeben, so ist $M_1dx+N_1dy_1=0$, $M_2dx+N_2dy=0$, u. s. f. Die Benutzung dieser particulären Integrale giebt nun zu mancherlei Transformationen Gelegenheit, unter welchen ich die folgende hervorhebe. Man bilde das Product $\psi y=(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_\mu)$, so erhält man durch Zerlegung in einfache Brüche:

$$\frac{M}{\psi y} = G+\frac{M_1}{\psi' y_1(y-y_1)}+\cdots+\frac{M_\mu}{\psi' y_\mu(y-y_\mu)}$$

$$\frac{N}{\psi y} = H+\frac{N_1}{\psi' y_1(y-y_1)}+\cdots+\frac{N_\mu}{\psi' y_\mu(y-y_\mu)}.$$

G und H bedeuten die in den Quotienten enthaltenen ganzen Functionen von y.

Bemerkt man noch, dafs $M_1 dx = -N_1 dy_1$, u. s. f. ist, so ergiebt sich

$$\frac{Mdx+Ndy}{\psi y} = Gdx+Hdy+\frac{N_1 d(y-y_1)}{\psi' y_1 (y-y_1)}+\cdots+\frac{N_\mu d(y-y_\mu)}{\psi' y_\mu (y-y_\mu)} = 0.$$

Durch diese Transformation wird die Gleichung

$$(A+By+Cy^2)dx+dy = 0,$$

wo A, B, C beliebige Functionen von x sind, sofort integrabel, wenn zwei particuläre Integrale derselben gegeben sind. Da nämlich $N=1$, $\psi y=(y-y_1)(y-y_2)$, $H=0$, $G=C$ ist, so verwandelt sich die Gleichung in

$$Cdx+\frac{d(y-y_1)}{(y_1-y_2)(y-y_1)}+\frac{d(y-y_2)}{(y_2-y_1)(y-y_2)} = 0$$

oder in

$$C(y_1-y_2)dx+\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}-\frac{d(y-y_2)}{y-y_2} = 0;$$

wovon $\frac{y-y_1}{y-y_2}.e^{\int C(y_1-y_2)dx} = \text{const.}$ das Integral ist.

Die vorstehende Gleichung läfst sich, wie leicht zu sehen, auf die Form $dy+(y^2+X)dx = 0$ zurückführen, von welcher *Euler* (Inst. I. S. 383) zeigt, wie schon aus einem einzigen particulären ihr vollständiges Integral gefunden werden kann. Wenn nämlich der Werth y_1 von y der Gleichung genügt, so ist $dy+y^2dx = dy_1+y_1^2dx$ oder $d(y-y_1)+(y-y_1)(y+y_1)dx = 0$. Dividirt man diese Gleichung mit $(y-y_1)^2$ und setzt $\frac{1}{y-y_1} = z$, so erhält man $dz = 2y_1 z\,dx+dx$, mithin durch Integration dieser linearen Gleichung:

$$z = \frac{1}{y-y_1} = e^{2\int y_1 dx}\left(\text{const.}-\int e^{-2\int y_1 dx}dx\right).$$

Aus diesem schönen *Eulerschen* Resultate kann das obige leicht abgeleitet werden; denn es folgt daraus zuerst $\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+(y+y_1)dx = 0$, mithin $(y-y_1)e^{\int(y+y_1)dx} = \text{const.} = a$; und eben so, wenn y_2 ein zweites particuläres Integral ist, $(y-y_2)e^{\int(y+y_2)dx} = b$; folglich, wenn $e^{\int y dx}$ durch Division weggeschafft wird, $\frac{y-y_1}{y-y_2}e^{\int(y_1-y_2)dx} = \frac{a}{b} = \text{const.}$ Was man daher in diesem Falle durch die angegebene Transformation erlangt, kommt an Werth dem *Eulerschen* Resultate nicht gleich.

Bezeichnet man durch $Mdx+Ndy = 0$ die von *Jacobi* in diesem Journal behandelte Gleichung, so ist

$$M = C+C'x+C''y \quad -(A+A'x+A''y)y,$$
$$N = (A+A'x+A''y)x-(B+B'x+B''y).$$

Man genügt dieser Gleichung durch die Annahme $y = \alpha x + \beta$, wenn α und β nach folgenden Bedingungen bestimmt werden:

$$(A + A''\beta)\beta + (B + B''\beta)\alpha = C + C''\beta$$
$$(A' + A''\alpha)\beta + (B' + B''\alpha)\alpha = C' + C''\alpha.$$

Hieraus erhält man für α eine Gleichung dritten Grades. Es seien α_1, α_2, α_3 ihre Wurzeln und β_1, β_2, β_3 die entsprechenden Werthe von β, so hat man drei particuläre Integrale $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$, $y_3 = \alpha_3 x + \beta_3$. Ist wieder $\psi y = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$, so erhält man

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi y} = \frac{N_1 d(y - y_1)}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \frac{N_2 d(y - y_2)}{\psi' y_2 (y - y_2)} + \frac{N_3 d(y - y_3)}{\psi' y_3 (y - y_3)}.$$

Es läfst sich fast ohne alle Rechnung zeigen, dafs die Quotienten $\frac{N_1}{\psi' y_1} = q_1$, $\frac{N_2}{\psi' y_2} = q_2$, $\frac{N_3}{\psi' y_3} = q_3$ constant sind. Es ist nämlich

$$N_1 = (A + A'x + A''y_1)x - (B + B'x + B''y) = (A' + A''\alpha_1)x^2 + \cdots$$

ein Polynom vom zweiten Grade. Eben so ist auch

$$\psi' y_1 = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)$$

ein Polynom zweiten Grades. Bezeichnet man den Werth von x, für welchen $y_1 = y_2$ ist, durch x_3, und den Werth von x, für welchen $y_1 = y_3$ ist, durch x_2, so ist

$$\psi' y_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(x - x_2)(x - x_3).$$

Bemerkt man nun, dafs $M_1 + N_1\alpha_1 \left(= M_1 + N_1 \frac{dy_1}{dx}\right)$ und eben so $M_2 + N_2\alpha_2$ für jeden Werth von x identisch Null sind, und dafs folglich für $x = x_3$ und $y_1 = y_2$, $M_1 = M_2$, $N_1 = N_2$ werden: so hat man für $x = x_3$, $M_1 + N_1\alpha_1 = 0$, $M_1 + N_1\alpha_2 = 0$, folglich, da im Allgemeinen α_1 von α_2 verschieden ist, $M_1 = 0$, $N_1 = 0$; daher ist N_1 theilbar durch $x - x_3$, und eben so durch $x - x_2$; folglich $N_1 = (A' + A''\alpha_1)(x - x_2)(x - x_3)$, mithin

$$q_1 = \frac{A' + A''\alpha_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich q_2 und q_3, und hieraus folgt sofort das Integral der vorgelegten Gleichung, nämlich

$$(y - y_1)^{q_1}(y - y_2)^{q_2}(y - y_3)^{q_3} = \text{const.}$$

wobei noch zu bemerken, dafs $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, weil N in Bezug auf y vom ersten, ψy vom dritten Grade und $q_1 = \frac{N_1}{\psi' y_1}$ u. s. f. ist.

Sind M und N zwei homogene Functionen von x und y von gleichen Graden, so dient bekanntlich die Substitution $y = tx$ zur Integration der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$. Dieselbe Substitution erstreckt sich auch auf die allgemeinere Gleichung $Mdx + Ndy + Q(x\,dy - y\,dx) = 0$, in welcher M und N homogen und von gleichem Grade n sind, Q aber eine beliebige Function von $\frac{y}{x}$ ist. Denn setzt man $y = tx$, so wird $M = x^n T$, $N = x^n T_1$, wo T, T_1, so wie Q, Functionen von t sind, und die vorgelegte Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$(T + tT_1)x^{n-2}dx + T_1 x^{n-1}dt + Q\,dt = 0,$$

welche, weil sie linear nach x^{n-1} ist, folgendes Integral giebt:

$$\frac{x^{n-1}}{n-1}\cdot e^{\int\frac{(n-1)T_1\,dt}{T+tT_1}} + \int e^{\int\frac{(n-1)T_1\,dt}{T+tT_1}}\frac{Q\,dt}{T+tT_1} = \text{const.}$$

Dieses Verfahren ist auch anwendbar, wenn Q eine homogene Function von x und y von beliebigem Grade q ist; denn für $y = tx$ wird $Q = x^q f(t)$ und durch Division mit x^q erhält die Gleichung die oben angenommene Form. Man findet hiernach z. B. das Integral der folgenden Gleichung:

$$(ax^2 + bxy + cy^2)dx + (a'x^2 + b'xy + c'y^2)dy + g(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Dieses Integral ist

$$(y - \mu_1 x)^{A_1}(y - \mu_2 x)^{A_2}(y - \mu_3 x)^{A_3}$$
$$+ \frac{g}{c'}\int(y\,dx - x\,dy)\{(y - \mu_1 x)^{A_1-1}(y - \mu_2 x)^{A_2-1}(y - \mu_3 x)^{A_3-1}\} = \text{const.}$$

Die Gröfsen μ_1, μ_2, μ_3 sind die Wurzeln der Gleichung

$$a + b\mu + c\mu^2 + (a' + b'\mu + c'\mu^2)\mu = 0.$$

Der Werth von A_1 ist $A_1 = \frac{a' + b'\mu_1 + c'\mu_1^2}{c'(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)}$, und eben so werden A_2 und A_3 bestimmt. Ferner ist $A_1 + A_2 + A_3 = 1$ und vermöge dieser Bedingung wird der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential von der Form $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)$.

Unter den von *Euler* gegebenen Beispielen findet sich S. 347 folgendes:

$$y\,dx - x\,dy + ax^n y\,dy(x^n + b)^{\frac{1}{n}} = 0,$$

zu dessen Integration wieder eine „substitutio non adeo obvia", nämlich

$$yv = \frac{1}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}}$$

gebraucht wird. Der Schlüssel zu dieser Substitution liegt in der Bemerkung, dafs

$$y_1 = \frac{-x}{ab(x^n + b)^{\frac{1}{n}}}$$

ein particuläres Integral der Gleichung ist. Drückt man x durch y_1 aus und eliminirt alsdann x aus der Differentialgleichung, so erhält sie die Form

$$y_1 dy - y dy_1 + k y_1^n (y - y_1) dy = 0,$$

wo $k = (-ab)^n$. Diese Gleichung fällt augenscheinlich unter die so eben angegebene Erweiterung der Regel der homogenen Functionen und wird mithin durch die Substitution $y = ty_1$, oder auch durch $y_1 = ty$, integrabel. Die zweite dieser Substitutionen, welche *Euler* anwendet, ist die bequemere.

30.

Fragen über Fuhrwerkräder.

(Von Herrn *B.* auf der Insel Rügen.)

I. **W**enn die Achse C (Taf. V.) eines Wagenrades PQ, welches sich um die Achse dreht, auf *geradliniger* Bahn PQ_6 mit *gleichförmiger* Geschwindigkeit fortgezogen, nach C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 gelangt, so durchläuft der Punct P der Reihe nach die Cykloïdenbogen PP_1, PP_2, PP_3, PP_4, PP_5, PP_6: der dem Puncte P im Durchmesser gegenüberliegende Punct Q aber *gleichzeitig* die Cykloïdenbogen QQ_1, QQ_2, QQ_3, QQ_4, QQ_5 und QQ_6; denn es ist $Pp_1 = P_1p_1$, $Pp_2 = P_2p_2$, u. s. w. Die Bogen PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 und PP_5 sind aber *kürzer*, als die Bogen QQ_1, QQ_2, QQ_3, QQ_4 und QQ_5; erst der Cykloïdenbogen PP_6 ist dem QQ_6 *gleich*. Wie erklärt es sich nun, dafs die beiden *fest mit einander verbundenen Puncte* P und Q sich mit *ungleichen* Geschwindigkeiten bewegen können? Und hat nicht etwa die *Ungleichförmigkeit* der Geschwindigkeit der Puncte P und Q (in der *Masse* des Rades) an sich eine *dynamische* Rückwirkung auf die *Zugkraft* an der mit *gleichförmiger* Geschwindigkeit geradlinig sich fortbewegenden Achse C; so wie auf die Festigkeit des Rades? Welches wäre der allgemeine Ausdruck der Geschwindigkeit v des Puncts P durch die gleichförmige Geschwindigkeit c der Achse und durch r, den Halbmesser des Rades?

II. Woher kommt es, dafs, *der Erfahrung nach*, die Achsen von Wagenrädern, welche um die Achsen sich drehen, nicht, wie es sein zu müssen *scheint*, *vorn* und *unten* eher abgenutzt werden, als *hinten* und *oben*, sondern umgekehrt, eher *hinten* und *oben*, als *vorn* und *unten*? Aufmerksame Fuhrleute schmieren, in Folge der bezeichneten *Erfahrung*, die Achsen mehr *hinten* und *oben*, als *vorn* und *unten*.

31.

Inhalts-Verzeichnifs I.

der vierten zehn Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, 31 bis 40, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1846 bis 1850 von A. L. Crelle; nach alphabetischer Ordnung der Namen der Verfasser der Abhandlungen.

Dr. Fr. Arndt, Gymnasiallehrer zu Stralsund.

Dr. C. G. J. Jacobi, Akademiker und Professor der Mathematik zu Berlin.

Dr. F. Joachimsthal, Professor der Mathematik zu Berlin.

Dr. C. J. Malmstèn, Professor der Mathematik an der Universität zu Upsàla.

Dr. C. O. Meyer zu Königsberg in Pr.

Dr. F. Minding, Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat.

Dr. A. F. Möbius, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

32.

Inhalts-Verzeichnifs II.

der ersten vierzig Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1826 bis 1850 von A. L. Crelle; nach den Gegenständen.

Wenn man die Zahlen dieses Verzeichnisses
von 1 bis 323 in dem Inhalts-Verzeichnifs I. am Schlusse des 10ten Bandes,
- 324 - 577 - - - - - I. - - - - 20ten -
- 678 - 766 - - - - - I. - - - - 30ten -
- 766 - 980 - - - - - I. am Schlusse dieses 40ten Bandes
sucht, so findet man die Titel der Abhandlungen und Artikel und die Orte wo sie sich in der Sammlung befinden.

I. Reine Mathematik.

I. Analysis.

A. Arithmetik und Algebra.

B. Combinatorik.

C. Zerlegung der Brüche insbesondere.

D. Theorie der Zahlen insbesondere.

E. Kettenbrüche insbesondere.

F. Theorie der Gleichungen insbesondere.

G. Analytische Facultäten insbesondere.

H. Interpolation insbesondere.

I. Theorie der Functionen insbesondere.

K. Reihen insbesondere.

L. Differential- und Integral-Rechnung.

M. Bestimmte Integrale insbesondere.

N. Elliptische und Abelsche Functionen insbesondere.

O. Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

2. Geometrie.

A. Elementar-Geometrie.

B. Goniometrie und Trigonometrie.

C. Sphärik und sphärische Trigonometrie.

D. Synthetische Geometrie.

E. Analytische Geometrie.

F. Von einzelnen Curven und Flächen.

3. Mechanik.

A. Statik und Dynamik.

B. Hydrostatik und Hydrodynamik.

II. Angewandte Mathematik.

A. Astronomie.

B. Chronologie.

C. Optik und Theorie des Lichts.

D. Theorie der Maschinen.

E. Theorie der Wärme.

F. Physik.

Verschiedenes.

Einige Druckfehler.

Im 31ten Bande.

S. 111 Z. 9 v. u. lese man 3.3—1 statt 3.(3—1)
—122 — 3 v. u fehlt das Wort „unbestimmtes" nach „ein"
—124 — 7 v. u. mufs das Wort „nicht" wegfallen.
In Tafel VI. Fig. 6 mufs a_1 statt a_3 stehen.

Im 34ten Bande.

S. 46 Z. 9 v. o. l. m. inventam st. inventum
— 47 — 8 v. o. l. m. memoratam st. memoratum
— — —12 v. o. l. m. dubitare st. dubitae
— — —21 v. o. l. m. certe st. cito
— 50 —12 v. o. l. m. A_2 st. et
— — —18 v. o. l. m. divisore non gaudet st. divisore gaudet
— 51 — 8 v. o. l. m. $\sqrt{(c\sqrt{a})}+\sqrt[3]{(h\sqrt{(c\sqrt{d})})}$ st. $\sqrt{(c\sqrt[3]{a})}+\sqrt{(h\sqrt{(c\sqrt{d})})}$
— 53 — 9 u. 10 v. o. l. m. A_p st. A_ν
— 60 —10 v. o. l. m. indentico st. identica
— 61 — 4 v. o. l. m. una st, uno
— — — 3 v. u. l. m. irreductibilem appellavimus st. irreductibilem
— 62 — 8 v. o. l. m. communem eum st. communem
— — — 5 v. u. l. m. $\varphi(x^{\mu_1}, m_1)$ st. $\varphi(x_1^{\mu_1}, m_1)$
— 64 —10 v. o., S. 65 Z. 6 v. u., S. 66 Z. 14 v. o., S. 67 Z. 2 v. u. l. m. rationales radicalium in ipso s occurentium st. rationales ipsius s
— — —12 v. o. l. m. quaedam exterior st. quaedam
— 66 — 7 v. u. l. m. z^μ st. 2^μ
— 71 — 7 v. u. l. m. ut st. et u. immutato st. immutatu
— — —11 v. u. l. m. m st. μ
— 73 —10 v. o. l. m. $w^{-k}x$ st. $w^{-k}x_2$
— 75 —14 v. u. l. m. $f(u)$ st. $\psi(u)$
— 80 — 5 u. 7 v. u. und S. 81 Z. 10 v. o. l. m. $f'(u)$ st. $f(u)$
— 86 in Formel (19.) l. m. $x+u$ st. $x-u$
— 93 Z. 8 v. o. mufs $\sin\frac{1}{2}(2n-1)x$ wegfallen.
—125 — 1 v. u. l. m. 1762 st. 1772
—145 — 1 v. o. l. m. 33_a st. 31_a und Z. 12 v. u. γ st. φ

Im 40ten Bande.

—185 — 1 v. u. l. m. die erste st. diese
—186 —10 v. u. l. m. $G(x)$ st. yx
—188 — 8 v. u. l. m. §. 61. st. §. 6.
—286 —15 u. 16 v. o. l. m. une définition collective, st. une définition unique et complète,
—318 —10 v. u. l. m. $(m-2)\frac{\partial v}{\partial x_k}$ st. $(m-1)\frac{\partial v}{\partial x_k}$
— — — 6 v. u. l. m. $v=0$, $\frac{\partial v}{\partial x_k}=0$, st. $\Delta=0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial x_k}=0$,
— — — 3 v. u. l. m. $\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}$ st. $\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}$

Crelle, Journal d. Math. Bd. 40. Heft 4

Facsimile einer Handschrift von J. A. Eytelwein.

Meinen verbindlichsten Dank für die schätzbare Zusendung, welche mich noch in diesem Monat nach Charlottenburg begleiten und mir manche angenehme Stunde verursachen soll. Da ich in der Folge für die Fortschritte der Architektur abgestorben bin, so denke ich mit dem 8ten erhaltenen Bande des archit. Journals den Beschluß zu machen und danke daher verbindlichst für die Fortsetzung desselben. Wenn Sie dagegen die Güte haben wollen und mir auch bei meiner Abwesenheit von Berlin noch ferner das Journal für Mathematik durch die Post zusenden, so werden Sie dadurch ungemein verbinden

Ihren

aufrichtigen Freund
Eytelwein
d. 7 März 35.

1.

T E D R C B A

2.

L E D K T C B R A

3.

K E D T C B A

4.

O' B P' M C' Q Q' C A P O

B'
G'
I'
L N F' G O A' B M H' I C
H
F
A

Crelle, Journal d. Math. Bd. 40 Heft 4.